数学科指導法 2

微分積分学の基本定理

電子工学科　梶　晃也

(1) 微分積分学の基本定理

(2) 僕が高校数学で一番苦労したのは、微分積分学でした。だから微分積分学の基本定理のことをこの機会にしっかり復習したかったし公式の証明もしてみたかったのでこのテーマを選びました。

(3) 授業の始まる前に、板書しといたのは良かったと思う。でも板書をしたことで、黒板と対話しているみたいになってしまった。それに指示語を多く使用してしまい分かりにくかったかもしれない。あと一番の問題点は、生徒を無視した授業であったことだと思う。

段階	指導内容	指導上の留意点
導入	微分積分学の基本定理の紹介	板書をまずして色などを使いメリハリをつける。テーマをしっかり言い今日最も大事なことを強調して言う。
展開	微分積分学の基本定理の説明、証明 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_a^b$ $\int f(x)dx = F(x) + C$ $\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a)$	まず微分、積分とは何かを知ってもらう。微分と積分の関係についてまず述べる。証明の計算結果などについて質問して生徒を授業に参加させる。 できるだけ分かりやすく説明する。
まとめ	微分積分学の基本定理を使いこなせるようにする	基本的な問題を使い基本定理に慣れてもらう。

(4) 授業の準備では、久しぶりに図書館などを使い調べ学習ができてよかった。実際に授業をすると、緊張して黒板の方を向いてしまった。あとは、微分と積分の関係についてもう少ししっかり調べるべきであった。

(5) 授業の流れが単調だったので、飽きる原因になる。生徒に質問などをしたほうがよか

った。目的がはっきりしていなかった。板書に色を使うなどしたほうがよかった。

(1) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv \left[F(x)\right]_a^b$

ただし $\int f(x)dx = F(x) + C$

[証明]

区間 $[a,b]$ ではなく途中の x をとり、区間 $[a,x]$ の面積 S を考えます。この S は x は関数となるから $S(x)$ と書くことにする。この時面積 $S(x)$ は次式で与えられる。

$$S(x) = \int_a^x f(x)dx \cdots ①$$

さらに図の矩形 $\Delta S(x_i)$ を考える。この高さを h_i とすると

$$h_i = \frac{\Delta S(x_i)}{\Delta x_i} \cdots ②$$

となるので、$\Delta x_i \to 0$ の時のこの h_i の極限は

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} h_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta S(x_i)}{\Delta x_i} = f(x_i) = \frac{d}{dx} S(x_i) = S'(x_i) \cdots ③$$

となる。

これが各 Δx_i でいえるから、区間 a から x までの $S(x)$ については

$$\frac{d}{dx} S(x) = f(x) \cdots ④$$

となる。

上式の両辺を積分すると形式的に(C は積分定数)

$$\int dS(x) = \int f(x)dx + C \cdots ⑤$$

と書け、上式の左辺は $S(x)$ であり、そして $f(x)$ の不定積分は $F(x)$ だから

$$S(x) = \int f(x)dx + C = F(x) + C \cdots ⑥$$

が得られ、①と⑥より

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) + C \cdots ⑦$$

となる。ここで C を定めるために、$x = a$ を⑦に代入すると

$$0=\int_a^a f(x)dx=F(a)+C \cdots ⑧$$

となるのでCは

$$C=-F(a) \cdots ⑨$$

と定まる。(ただし$\int_a^a f(x)dx=0$)

したがって⑦に⑨を代入すると

$$\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a) \cdots ⑩$$

となる。ここで、$x=b$を上式に代入すると

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b \cdots ⑪$$

が得られる。