数値解析

1. 非線形方程式 $f(x) = 0$

石渡哲哉（芝浦工大数理）

この章の目標

非線形方程式

$$f(x) = 0$$

の真の解 α を求める方法およびその数学的背景を理解する。

考え方: α に収束する近似列（数列や区間列など) を逐次的に構成する。

例: 反復法による近似列 $\{x_n\}$ の構成

Step 1. 初期設定 x_0 を与える。

Step 2. x_{n-1} までの情報から x_n を作る。

（例：漸化式 $x_n = g(x_{n-1})$）

Step 3. (無限回の計算は無理なので) Step 2 の繰り返しを終了する条件を設定しておき、計算を終了する。

$\boxed{\text{重要なこと:}}$ $x_n \to \alpha (n \to \infty)$ を数学的に保障。

代表的な方法

- **二分法** (bisection method): **連続関数に対して適用可能。収束保障。収束が遅い。**
- **ニュートン法** (Newton method): C^1 **関数に対して適用可能。局所収束。収束速い。**

1.1 二分法 (bisection method)

$f(x)$: 区間 I 上連続 $(f \in C(I))$

$a, b \in I$ $(a < b)$ に対して, $f(a)f(b) < 0$ を満たしているとする。

この時、以下の二分法によって縮小閉区間の列 $I_n = [a_n, b_n]$ をつくり、α の近似解を計算することができる。

二分法の手順

1. $a_0 = a, b_0 = b$
2. $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
3. 終了条件の判定.

   未終了の時

   - $f(a_n)f(c_{n+1}) < 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_{n+1}$.
   - $f(b_n)f(c_{n+1}) < 0 \Rightarrow a_{n+1} = c_{n+1}, b_{n+1} = b_n$.

   として 2 へ。

終了判定条件の例： $|f(c_{n+1})| < \varepsilon$ **や** $|b_n - a_n| < \varepsilon$

二分法の数学的背景:

- 二分した区間のどちらかには、中間値の定理によって解が含まれることが保証される。
- 区間の幅が 0 に収束することから、c_n の解 α への収束が保証される。

■ **Strategy of the proof.**

Step 1. $\{c_n\}$ が収束することを示す。

Step 2. その極限値が解であることを示す。

1.2 ニュートン法 (Newton method)

近似収束列 $\{x_n\}$ を次のように構成する:

ニュートン法の手順

1. 初期値 x_0 を与える。
2. $$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$
3. 終了条件の判定.

   未終了の場合, 2 へ。

特徴:

- $f \in C^1$ のときの標準的な方法。
- 二次収束
- $f'(x)$ を求める必要がある。
- 局所収束性のみ
  (初期値を適切にとる必要がある。$f'(x_n) = 0$ のとき計算が破綻。無限ループになる可能性もあり。)

ニュートン法の数学的背景: (※ 収束性は次節以降)

ニュートン法の２次収束

I: 考えている閉区間,

$f \in C^2(I), f'(x) \neq 0 \ (x \in I)$,

α: I 内の $f(x) = 0$ の唯一解,

$\{x_n\}$: ニュートン法による反復列, $x_n \in I$,

$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

$\Rightarrow \exists M > 0$ s.t.

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq M|x_n - \alpha|^2 \quad (n \in \mathbb{R}).$$

参考:

- p **次収束** $(p > 1) \Leftrightarrow \exists M > 0$ **s.t.**

$$|x_{n+1} - \alpha| \le M|x_n - \alpha|^p.$$

- **線形収束 or １次収束**

$\Leftrightarrow$

$x_{n+1} - \alpha = (M + \varepsilon_n)(x_n - \alpha)$

$(0 < |M| < 1, \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0\ )$

1.3 不動点定理, 縮小写像

不動点形式: $x = g(x)$ $\Leftrightarrow f(x) = 0$

Def. α は g の不動点 $\Leftrightarrow \alpha = g(\alpha)$

Remark: 不動点の存在・非存在、個数は g による。

※ 数値計算法としては、g の不動点 α が $f(x) = 0$ の解になっているように f から g を作る。

例: $g(x) = x - \varphi(x)f(x)$ $(\varphi(x) \neq 0)$

I: 閉 区間

条件 (A): $g : I \to I$, 連続写像

条件 (B): g が縮小写像 (contraction mapping)

$\Leftrightarrow \exists L \in [0, 1)$ s.t.

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \quad (\forall x, y \in I).$$

★不動点の存在について

不動点定理 (Fixed Point Theorem)

条件 (A) $\Rightarrow$ g は I に少なくとも１つの不動点を持つ。i.e. $\exists \alpha \in I$ s.t. $\alpha = g(\alpha)$.

★不動点の一意存在について

縮小写像の原理

条件 (A) かつ (B) $\Rightarrow$ g は I に唯１つの不動点を持つ。

$$\exists! \alpha \in I \text{ s.t. } \alpha = g(\alpha).$$

1.4 不動点反復法

前節の不動点形式を利用して、

Step 1. x_0 を与える。

Step 2. $x_{n+1} = g(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

により反復列を生成する方法を不動点反復法という。(g を反復関数という。)

不動点反復列の収束

条件 (A) かつ (B) $\Rightarrow \forall x_0 \in I$ に対し、上記不動点反復法により生成される反復列 $\{x_n\}$ は g の不動点 α に収束する。

Remark: 条件 (B) について。$g \in C^1$ であれば、
条件 (B'): I 上で $|g'(x)| < 1$

であれば、g の縮小性は OK.(条件 (B) OK.) (各自)

★ニュートン法への適用

　ニュートン法は

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

に対する不動点反復法

　よって、条件 (A), (B) を確認すればよい。

※ (各自) f が解 α の近傍で $f \in C^2, f'(x) \neq 0$ であれば、α を含み、条件 (A), (B) を満たす閉区間 I が存在する。