

ソフトウェア構成特論 第3回 練習問題1の解答例

大学院理工学研究科 電気電子情報工学専攻 篠埜 功

練習問題 1 $depth(t) \leq size(t)$ を算術式の構造に関する帰納法で証明せよ。

証明

証明する性質 $depth(t) \leq size(t)$ を $P(t)$ と書く。算術式の構造に関する帰納法で証明する。

$t = true$ の場合:

$$LHS = depth(true) = 1$$

$$RHS = size(true) = 1$$

よって $LHS \leq RHS$ 。つまり $P(true)$ が成立する。

$t = false$ の場合: $t = true$ の場合と同様。

$t = 0$ の場合: $t = true$ の場合と同様。

$t = succ\ t_1$ の場合: $P(t_1)$ の成立を仮定する。つまり、 $depth(t_1) \leq size(t_1)$ を仮定する。

$$LHS = depth(succ\ t_1)$$

$$= depth(t_1) + 1$$

$$\leq size(t_1) + 1$$

$$RHS = size(succ\ t_1)$$

$$= size(t_1) + 1$$

以上より $LHS \leq RHS$ 、つまり $P(succ\ t_1)$ が成立する。

$t = pred\ t_1$ の場合: $t = succ\ t_1$ の場合と同様。

$t = iszero\ t_1$ の場合: $t = succ\ t_1$ の場合と同様。

$t = if\ t_1\ then\ t_2\ else\ t_3$ の場合: $P(t_1), P(t_2), P(t_3)$ の成立を仮定する。つまり、 $depth(t_1) \leq size(t_1), depth(t_2) \leq size(t_2), depth(t_3) \leq size(t_3)$ を仮定する。

$$LHS = depth(if\ t_1\ then\ t_2\ else\ t_3)$$

$$= max\{depth(t_1), depth(t_2), depth(t_3)\} + 1$$

$$\leq depth(t_1) + depth(t_2) + depth(t_3) + 1$$

$$\leq size(t_1) + size(t_2) + size(t_3) + 1$$

$$= size(if\ t_1\ then\ t_2\ else\ t_3)$$

$$= RHS$$

以上より $LHS \leq RHS$ 、つまり $P(if\ t_1\ then\ t_2\ else\ t_3)$ が成立する。

よって算術式の構造に関する帰納法より、任意の算術式 t について $P(t)$ が成立する。