ソフトウェア構成特論 第4回

大学院理工学研究科 電気電子情報工学専攻　篠埜 功

1　はじめに

今回は、第 3 回の最後に少し説明した、整礎な関係および整礎帰納法とは何かを知り、さまざまな帰納法が整礎帰納法の特別な場合であることを理解することを目標とする。また、式の意味を評価（評価関係）を評価規則で定義するということをブール式を例として行う。ここで定義するのは、第 1 回に説明した意味論の中の操作的意味論であり、操作的意味論の中の small-step semantics と呼ばれるものである。

2　整礎帰納法の例

ここではいろいろな帰納法が整礎帰納法の例であることを示す。

例 1 $\prec$ を以下のように定義される自然数（0 以上の整数）上の二項関係とする。

$$n \prec m \Longleftrightarrow m = n + 1$$

まずこの二項関係 $\prec$ は無限降下列がないので、整礎関係である。この場合の整礎帰納法は数学的帰納法であることを以下で示す。

この二項関係 $\prec$ についての整礎帰納法を表す論理式は以下のものである。

$$\begin{array}{l} \forall a \in \mathbf{Nat}.\ \{\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b \prec a \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(a)\} \\ \Longleftrightarrow \\ \forall a \in \mathbf{Nat}.\ P(a) \end{array}$$

論理式 $\forall a \in \mathbf{Nat}.\ \{\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b \prec a \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(a)\}$ を言い換えるために、$a = 0$ の場合と $a > 0$ の場合で場合分けをする。

$a = 0$ のとき、上記論理式の $\{\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b \prec a \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(a)\}$ の中の a を 0 で置き換えると、$\{\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b \prec 0 \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(0)\}$ である。どの自然数 b についても、$b \prec 0$ は偽であり、$b \prec 0 \Rightarrow P(b)$ は真である。よって、$\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b \prec 0 \Rightarrow P(b)$ は真であり、$\{\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b \prec 0 \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(0)\}$ は $P(0)$ と同じである。

次に、$a > 0$ の場合、何らかの自然数 k について、$a = k + 1$ である。論理式 $\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b \prec a \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(a)$ の中の a を $k+1$ で置き換えると $\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b \prec k+1 \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(k+1)$ である。二項関係 $\prec$ の定義より、$b \prec k+1 \Leftrightarrow k+1 = b+1 \Leftrightarrow b = k$

であるので、$\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b = k \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(k+1)$ である。$b \neq k$ と $b = k$ で場合分けをする。$b \neq k$ のとき、$b = k$ は偽なので、$b = k \Rightarrow P(b)$ は真である。$b = k$ のとき、論理式 $b = k \Rightarrow P(b)$ 中の b を k で置き換えると $k = k \Rightarrow P(k)$ である。$k = k$ は真であるので、これは $P(k)$ と同じである。つまり、$\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b = k \Rightarrow P(b)$ は $P(k)$ と同じである。よって、$\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b = k \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(k+1)$ は $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ と同じである。よって、0 より大きい任意の自然数 a について論理式 $\{\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b \prec a \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(a)\}$ が成り立つことは、論理式 $\forall k \in \mathbf{Nat}.\ P(k) \Rightarrow P(k+1)$ が成り立つことと同じである。

以上より、$a = 0$ の場合と $a > 0$ の場合をあわせると、論理式 $\forall a \in \mathbf{Nat}.\ \{\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b \prec a \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(a)\}$ は $P(0) \land \forall k \in \mathbf{Nat}.\ P(k) \Rightarrow P(k+1)$ と同じである。

以上より、論理式

$$\begin{array}{l} \forall a \in \mathbf{Nat}.\ \{\Big(\forall b \in \mathbf{Nat}.\ b \prec a \Rightarrow P(b)\Big) \Rightarrow P(a)\} \\ \iff \\ \forall a \in \mathbf{Nat}.\ P(a) \end{array}$$

は、$\{P(0) \land \forall k \in \mathbf{Nat}.\ P(k) \Rightarrow P(k+1)\} \iff \forall a \in \mathbf{Nat}.\ P(a)$ と同じである。これは数学的帰納法である。

例 2 $\prec$ を自然数（0 以上の整数）上の関係 $<$ とする。この場合の整礎帰納法は累積帰納法（course-of-values induction あるいは complete induction）である。

例 3 $\prec$ を以下のように定義される算術式の集合上の二項関係とする。

$$\mathtt{r} \prec \mathtt{s} \iff \mathtt{r}\text{ が }\mathtt{s}\text{ の直接の部分式}$$

この場合の整礎帰納法は算術式に関する構造帰納法である。

例 4 $\prec$ を以下のように定義される算術式の集合上の二項関係とする。

$$\mathtt{r} \prec \mathtt{s} \iff \mathit{depth}(\mathtt{r}) < \mathit{depth}(\mathtt{s})$$

（depth は前回定義した、算術式の深さを返す関数である。）この場合の整礎帰納法は算術式の深さに関する帰納法である。

命題 1 (算術式の深さに関する帰納法)

$$\begin{array}{l} \forall \mathtt{s} \in \mathcal{T}.\ \{\forall \mathtt{r} \in \mathcal{T}.\ \mathit{depth}(\mathtt{r}) < \mathit{depth}(\mathtt{s}) \Rightarrow P(\mathtt{r})\} \Rightarrow P(\mathtt{s}) \\ \iff \\ \forall \mathtt{t} \in \mathcal{T}.\ P(\mathtt{t}) \end{array}$$

例 5 $\prec$ を以下のように定義される算術式の集合上の二項関係とする。

$$\mathtt{r} \prec \mathtt{s} \iff \mathit{size}(\mathtt{r}) < \mathit{size}(\mathtt{s})$$

（size は前回定義した、算術式の大きさを返す関数である。）この場合の整礎帰納法は算術式の大きさに関する帰納法である。

命題 2 (算術式の大きさに関する帰納法)

$$\begin{array}{l} \forall \mathtt{s} \in \mathcal{T}.\ \{\forall \mathtt{r} \in \mathcal{T}.\ \mathit{size}(\mathtt{r}) < \mathit{size}(\mathtt{s}) \Rightarrow P(\mathtt{r})\} \Rightarrow P(\mathtt{s}) \\ \iff \\ \forall \mathtt{t} \in \mathcal{T}.\ P(\mathtt{t}) \end{array}$$

3　式の評価

ここでは算術式から数に関するものを除いた、以下のように帰納的に定義される式（この講義ではブール式と呼ぶ）の意味を評価規則により与える。

```
t ::= true
   |  false
   |  if t then t else t
```

ブール式の値（ブール式を評価して得られるもの）は以下のものとする。

```
v ::= true
   |  false
```

これは、（たまたま）ブール式の部分集合である。（一般には、式の評価結果を式の集合の部分集合にする必要はないが。）

ここ以降では値を表すためのメタ変数 (metavariable) として $\mathtt{v}$ を用いる。これまで明示的に言ってなかったが、$\mathtt{t}$, $\mathtt{s}$, $\mathtt{r}$, $\mathtt{t}_1$, $\mathtt{t}_2$, $\mathtt{s}_1$, $\mathtt{s}_2$, $\mathtt{t}'$, $\mathtt{s}'$ などは term（算術式など、計算を表すもの（プログラム）を term という）を表すためのメタ変数として用いる。

ブール式の評価関係（ブール式の集合上の二項関係）を以下の 3 つの規則により定義する。

$$\texttt{if true then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3 \rightarrow \mathtt{t}_2 \qquad \text{(E-IFTRUE)}$$

$$\texttt{if false then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3 \rightarrow \mathtt{t}_3 \qquad \text{(E-IFFALSE)}$$

$$\frac{\mathtt{t}_1 \rightarrow \mathtt{t}_1'}{\texttt{if } \mathtt{t}_1 \texttt{ then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3 \rightarrow \texttt{if } \mathtt{t}_1' \texttt{ then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3} \ \text{(E-IF)}$$

これらの規則中の $\mathtt{t} \rightarrow \mathtt{t}'$ の形の statement を**評価判定**（*evaluation statement* あるいは *evaluation judgment*）と呼ぶ。

上記のそれぞれの規則は、同じメタ変数を同じ term で置き換えて用いる。それを規則の**インスタンス** (*instance*) という。例えば、E-IFTRUE 規則の $\mathtt{t}_2$ を `true` で置き換え、$\mathtt{t}_3$ を `if false then false else false` で置き換えると、

$$\texttt{if true then true else (if false then false else false)} \rightarrow \texttt{true}$$

が得られる。これは E-IFTRUE 規則のインスタンスである。

定義 1 (1 ステップ評価関係) 上記 3 つの規則を**満たす** term 上の最小の二項関係を *1* **ステップ評価関係**（*one step evaluation relation*）といい、$\rightarrow$ と書く。

関係が規則を**満たす**というのは以下のように定義される。

定義 2 規則とブール式上の二項関係 R について、その規則の任意のインスタンスに対し、前提部分（premise, 線の上側）の各評価判定

$$\mathtt{t} \rightarrow \mathtt{t}'$$

について $\mathtt{t}\ R\ \mathtt{t}'$ が成立するならば結論部分（conclusion, 線の下側）の評価判定

$$\mathtt{t} \rightarrow \mathtt{t}'$$

について $\mathtt{t}\ R\ \mathtt{t}'$ が成立するとき、その関係 R はその規則を**満たす**という。

ブール式上のある関係 R が (E-IF) 規則を**満たす**のは、任意のブール式 $\mathtt{t}_1, \mathtt{t}_1', \mathtt{t}_2, \mathtt{t}_3$ について

$$\mathtt{t}_1 \ R \ \mathtt{t}_1' \Rightarrow \texttt{if } \mathtt{t}_1 \texttt{ then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3 \ R \ \texttt{if } \mathtt{t}_1' \texttt{ then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3$$

が成立する場合である。

ブール式上のある関係 R が (E-IFTRUE) 規則を**満たす**のは、任意のブール式 $\mathtt{t}_2, \mathtt{t}_3$ について

$$\texttt{if true then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3 \ R \ \mathtt{t}_2$$

が成立する場合である。

ブール式上のある関係 R が (E-IFFALSE) 規則を**満たす**のは、任意のブール式 $\mathtt{t}_2, \mathtt{t}_3$ について

$$\texttt{if false then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3 \ R \ \mathtt{t}_3$$

が成立する場合である。

上記の 1 ステップ評価関係の定義（定義 1）は、間接的な定義である。これに対し、第二回の資料で述べた算術式の集合の定義と同様、以下のようにして 1 ステップ評価関係を直接構築することができる。

定義 3 (1 ステップ評価関係を直接構築する定義) 各自然数 i について、集合 $\mathcal{S}_i$ を以下のように定義する。ただし、ブール式の集合を $\mathcal{B}$ と書く。

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0 &= \emptyset \\
\mathcal{S}_{i+1} &= \{(\texttt{if true then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3, \mathtt{t}_2) \mid \mathtt{t}_2 \in \mathcal{B}, \mathtt{t}_3 \in \mathcal{B}\} \\
&\quad \cup \{(\texttt{if false then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3, \mathtt{t}_3) \mid \mathtt{t}_2 \in \mathcal{B}, \mathtt{t}_3 \in \mathcal{B}\} \\
&\quad \cup \{(\texttt{if } \mathtt{t}_1 \texttt{ then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3, \texttt{if } \mathtt{t}_1' \texttt{ then } \mathtt{t}_2 \texttt{ else } \mathtt{t}_3) \mid (\mathtt{t}_1, \mathtt{t}_1') \in \mathcal{S}_i\}
\end{aligned}$$

これらの集合を用いて、集合 $\mathcal{S}$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{S} = \bigcup_i \mathcal{S}_i$$

第二回の資料で述べた算術式の集合の定義と同様、定義 3 で定義される集合（ブール式上の二項関係）$\mathcal{S}$ は、定義 1 で定義される集合（ブール式上の二項関係）$\rightarrow$ と同一であることを示すことができる。

注意 評価判定の中で記号 $\rightarrow$ を用いており、また、ブール式上の二項関係である 1 ステップ評価関係を表すためにも同じ記号 $\rightarrow$ を用いている。別の記号を用いてもよいが、同じ記号を用いても紛らわしくはない。

ある評価判定 $\mathtt{t} \rightarrow \mathtt{t}'$ に対する**導出木** (*derivation tree*) を作ることができるとき、その評価判定は**導出可能**であるという。評価判定 $\mathtt{t} \rightarrow \mathtt{t}'$ の導出木とは、根 (root node) が $\mathtt{t} \rightarrow \mathtt{t}'$ であり、葉 (leaf) が E-IFTRUE 規則か E-IFFALSE 規則のインスタンスであり、中間ノード (internal node) が E-IF 規則のインスタンスであるような木のことである。

評価判定 $\mathtt{t} \rightarrow \mathtt{t}'$ の導出木が存在する場合に $\mathtt{t}$ と $\mathtt{t}'$ の間に 1 ステップ評価関係があり、$\mathtt{t} \rightarrow \mathtt{t}'$ の導出木が存在しない場合には $\mathtt{t}$ と $\mathtt{t}'$ の間には 1 ステップ評価関係がないことを示すことができる。

1 ステップ評価関係の例を 1 つ挙げる。

例 6 $\texttt{if true then false else false}$ を $\texttt{s}$ とし、$\texttt{if s then true else true}$ を $\texttt{t}$ とし、$\texttt{if false then true else true}$ を $\texttt{u}$ とする。すると

$$\texttt{if t then false else false} \to \texttt{if u then false else false}$$

という評価判定に対し以下の導出木を作ることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\texttt{s} \to \texttt{false}}\ \text{(E-IFTRUE)}}{\texttt{t} \to \texttt{u}}\ \text{(E-IF)}}{\texttt{if t then false else false} \to \texttt{if u then false else false}}\ \text{(E-IF)}$$

また、1 ステップ評価関係が成り立たない場合の例を以下に挙げる。

例 7 評価判定

$$\texttt{if true then true else false} \to \texttt{if false then true else false}$$

に対する導出木は存在しないので、この 2 つの term 間に 1 ステップ評価関係はない。

この例のような余分な対応関係が含まれていないというのが、上記の 1 ステップ評価関係の定義中の「最小の」ということの意味である。

補足 ブール式の評価規則は 3 つとも前提部分（線の上側）には 0 個か 1 個の評価判定しかなく、枝分かれがないが、一般には 2 個以上ある場合があり、その場合枝分かれのある木構造となる。

練習問題 1 $\texttt{if (if true then true else false) then true else false}$ を 1 ステップ評価せよ。つまり、このブール式を $\to$ の左側、何らかのブール式を $\to$ の右側に持つような評価判定に対する導出木を構築せよ。

1 ステップ評価は、行き先が 1 つに定まる。それを述べたのが次の定理である。

定理 1 (1 ステップ評価の一意性) $\texttt{t} \to \texttt{t}' \land \texttt{t} \to \texttt{t}'' \Longrightarrow \texttt{t}' = \texttt{t}''$

証明

評価判定 $\texttt{t} \to \texttt{t}'$ が成り立つということは、この評価判定が一番下にある導出木が存在することと同じである。そこで、この命題を、評価判定 $\texttt{t} \to \texttt{t}'$ の導出木に関する以下の性質 P として捉え直す。

$$P\left(\dfrac{\cdots}{\texttt{t} \to \texttt{t}'}\right): \quad \texttt{t} \to \texttt{t}'' \Longrightarrow \texttt{t}' = \texttt{t}''$$

この性質 P を、$\texttt{t} \to \texttt{t}'$ の**導出木の構造に関する帰納法**（これも well-founded induction の一例）（**導出に関する帰納法**と言ってもよい）で証明する（下記命題 3 参照）。$\texttt{t} \to \texttt{t}'$ の導出木において最後に使われる規則で場合分けをする。

E-IFTRUE の場合: $\texttt{t}$ は $\texttt{if true then t}_2\ \texttt{else t}_3$ の形をしている。よって、E-IFFLALSE は $\texttt{t} \to \texttt{t}''$ の導出木において最後に使われる規則にはなり得ない。さらに、E-IF も $\texttt{t} \to \texttt{t}''$ の導出木において最後に使われる規則にはなり得ない（E-IF が使われたとすると何らかの $\texttt{t}$ に対して $\texttt{true} \to \texttt{t}$ が成立しないといけないが、そのようなものはないので。）よっ

て、$\mathtt{t} \to \mathtt{t}''$ の導出木において最後に使われる規則は E-IFTRUE でしかあり得ない。よって $\mathtt{t}' = \mathtt{t}_2, \mathtt{t}'' = \mathtt{t}_2$ となり $\mathtt{t}' = \mathtt{t}''$ である。

E-IFFALSE の場合: 上の場合と同様、$\mathtt{t} \to \mathtt{t}''$ の導出木の最後に使われる規則が E-IFFALSE でなければならず、$\mathtt{t}' = \mathtt{t}''$ である。

E-IF の場合: $\mathtt{t}$ は $\mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3$ の形をしており、何らかのブール式 $\mathtt{t}'_1$ について $\mathtt{t}_1 \to \mathtt{t}'_1$ が成立している。また、$\mathtt{t}_1$ は `true`、`false` 以外のブール式でなければならない。よって $\mathtt{t} \to \mathtt{t}''$ の導出木の最後に使われる規則は E-IF でなければならない。また、$\mathtt{t} \to \mathtt{t}''$ の導出木の最後に使われる規則の前提部分は $\mathtt{t}_1 \to \mathtt{t}''_1$ の形をしていなければならない。よって帰納法の仮定より、$\mathtt{t}'_1 = \mathtt{t}''_1$ であり、$\mathtt{if}\ \mathtt{t}'_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3 = \mathtt{if}\ \mathtt{t}''_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3$ である。

導出木の直接の部分木関係は導出木上の整礎な二項関係である。つまり、導出木 T_1, T_2 に関し、

$$T_1 \prec T_2 \iff T_1 \text{は} T_2 \text{の直接の部分木}$$

と $\prec$ を定義すると、$\prec$ は導出木の集合上の整礎な二項関係である。$\prec$ に関する整礎帰納法が、導出木に関する帰納法である。

ブール式の評価判定の導出木に関する帰納法は以下のように記述される。

命題 3 (ブール式の評価判定の導出木の構造に関する帰納法) 任意の導出木 T に対し、その直接の各部分導出木 S すべてについて $P(S)$ が成り立つならば $P(T)$ が成り立つことが言えるならば任意の導出木 T に対して $P(T)$ が成り立つ。

この命題は、直接の部分木関係に関する整礎帰納法を言葉で書いたものであり、部分木がない場合（E-IFTRUE、E-IFFALSE）が base case に相当している。もちろん、この命題は、base case と induction step に明示的に分けて書いてもよい。

定義 4 ある term $\mathtt{t}$ は、それに適用できる評価規則がない場合、つまり $\mathtt{t} \to \mathtt{t}'$ が成立する $\mathtt{t}'$ が存在しない場合、その term $\mathtt{t}$ は**正規形**（*normal form*）であるという。

例えば、`true` や `false` は正規形である。この講義のブール式では、`true`, `false` 以外のブール式（つまり `if` 式）は正規形ではない。これについて第 5 回の資料で示す。