ソフトウェア構成特論 第5回

大学院理工学研究科 電気電子情報工学専攻　篠埜 功

1　はじめに

今回は、前回説明を始めたブール式の評価および算術式の評価について理解することを目標とする。

2　ブール式の評価について

前回提示したブール式の評価規則において、`true` と `false` というブール式は正規形（normal form）であった。これを以下のように言うこともできる。

定理 1. すべての値は正規形である。

ブール式の評価においては値は `true` と `false` であり、それらは正規形であるので、これが成り立つ。この逆もブール式においては成り立つ。

定理 2. `t` が正規形なら `t` は値である。

この定理は一般の言語では必ずしも成り立たないが、この講義でのブール式では成り立つ。これを直接証明する代わりに、これの対偶である以下の命題を証明する。

定理 3. `t` が値でないならば `t` は正規形ではない。

証明. 証明する性質は、以下の性質 P である。

$$P(\mathtt{t}):\ \mathtt{t}\text{ は値でない} \Rightarrow \mathtt{t}\text{ は正規形でない}$$

この性質 P をブール式 `t` の構造に関する帰納法により証明する。

1. $\mathtt{t} = \mathtt{true}$ の場合:
   `true` は値なので、$\Rightarrow$ の左側が偽であり、$P(\mathtt{t})$ が成立する。

2. $\mathtt{t} = \mathtt{false}$ の場合:
   `false` は値なので、$\Rightarrow$ の左側が偽であり、$P(\mathtt{t})$ が成立する。

3. `t` が `if` 式の場合:
   `t` は、$\mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3$ という形をしている。`t` は値ではなく、$\Rightarrow$ の左側が真なので、$\Rightarrow$ の右側が真であることを示せばよい。

   $\mathtt{t}_1$ の形で場合分けをする。

(a) $\mathtt{t}_1 = \mathtt{true}$ の場合:
$\mathtt{t}$ は E-IFTRUE 規則の左辺に適合するので、$\mathtt{t}$ は正規形ではない。よって $P(\mathtt{t})$ が成立する。

(b) $\mathtt{t}_1 = \mathtt{false}$ の場合:
$\mathtt{t}$ は E-IFFALSE 規則の左辺に適合するので $\mathtt{t}$ は正規形ではない。よって $P(\mathtt{t})$ が成立する。

(c) $\mathtt{t}_1$ が $\mathtt{true}$ でも $\mathtt{false}$ でもない場合:
$\mathtt{t}_1$ は値ではないので、帰納法の仮定より、$\mathtt{t}_1$ は正規形ではない。つまり、あるブール式 $\mathtt{t}_1'$ が存在して $\mathtt{t}_1 \to \mathtt{t}_1'$ である。よって E-IF 規則により $\mathtt{t} \to \mathtt{if}\ \mathtt{t}_1'$ $\mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3$ が得られ、$\mathtt{t}$ は正規形ではない。よって $P(\mathtt{t})$ が成立する。

以上より、ブール式の構造に関する帰納法により任意のブール式 $\mathtt{t}$ について $P(\mathtt{t})$ が成立する。 □

定義 1. 1 ステップ評価関係 $\to$ の反射的推移的閉包 (reflexive transitive closure) を**複数ステップ評価関係** (*multi-step evaluation relation*) といい、$\to^*$ と書く。つまり、以下の (1)-(3) を満たす最小の関係が $\to^*$ である。

(1) $\mathtt{t} \to \mathtt{t}'$ ならば $\mathtt{t} \to^* \mathtt{t}'$

(2) すべての $\mathtt{t}$ に対して $\mathtt{t} \to^* \mathtt{t}$

(3) $\mathtt{t} \to^* \mathtt{t}'$ かつ $\mathtt{t}' \to^* \mathtt{t}''$ ならば $\mathtt{t} \to^* \mathtt{t}''$

この反射的推移的閉包 $\to^*$ の定義は間接的定義だが、直接的な定義もできる。ブール式上の二項関係 $\to^i$ ($i \in \mathbf{Nat}$) を

$$\begin{aligned} \to^0 &= id \\ \to^{i+1} &= \to \circ \to^i \quad (i \geq 0) \end{aligned}$$

と定義したとき、

$$\bigcup_{i \in \mathbf{Nat}} \to^i$$

を $\to$ の反射的推移的閉包と定義してもよい。つまり以下の等式が成立することを証明できる。

$$\to^* \;=\; \bigcup_{i \in \mathbf{Nat}} \to^i$$

定理 4 (正規形の一意性)**.** $\mathtt{t} \to^* \mathtt{u}$ かつ $\mathtt{t} \to^* \mathtt{u}'$ かつ $\mathtt{u}$ と $\mathtt{u}'$ が両方とも正規形ならば $\mathtt{u} = \mathtt{u}'$ である。

証明. 1 ステップ評価の一意性より成り立つ。 □

ブール式の評価について、任意のブール式は必ず正規形まで評価されるという性質がある。このことを、ブール式の評価は停止性 (termination) が成り立つという。この性質は通常の言語ではほとんど成り立たないが、ブール式は評価毎に式の大きさが小さくなって

いくので、これが成り立つ。ブール式においては、正規形は値なので、任意のブール式は必ず値まで評価される。

停止性の証明について、以下のような方法がある。まず、整礎な関係 $\prec$ の定義された集合 S を選び、term の集合（今の場合はブール式の集合）から集合 S への関数 f を与える。次に、term $\mathtt{t}$ が term $\mathtt{t}'$ へ 1 ステップ評価される時に $f(\mathtt{t}') \prec f(\mathtt{t})$ が成り立つことを示す（これが成り立つように集合 S と関数 f を作る）。term $\mathtt{t}$ から評価が無限に続くとすると、集合 S に無限降下列が存在することになるので、評価は無限には続かない。

上記の議論をまとめると以下の定理となる。

定理 5 (評価の停止性)**.** 任意のブール式 $\mathtt{t}$ について何らかの正規形のブール式 $\mathtt{t}'$ が存在して $\mathtt{t} \to^* \mathtt{t}'$ が成り立つ。

証明. ブール式の 1 ステップ評価はブール式の大きさ（自然数）を（自然数上の大小関係 $<$ について）減少させる（付録 A 参照)。自然数上の大小関係 $<$ は整礎であるので、任意のブール式 $\mathtt{t}$ の評価は必ず停止する。 □

3 算術式の評価

ここからは算術式の評価について考える。第 2 回で算術式を以下のように定義した。

```
t ::= true
   |  false
   |  if t then t else t
   |  0
   |  succ t
   |  pred t
   |  iszero t
```

算術式の値（算術式を評価して得られるもの）は以下のものとする。

```
v ::= true
   |  false
   |  nv
nv ::= 0
    |  succ nv
```

これは、ブール式の値 `true`, `false` に、**数値** (*numeric value*) を加えたものである。数値はメタ変数 `nv` で表す。

算術式の評価規則は以下のものとする。算術式の評価関係（算術式の集合上の二項関係）を以下の 10 個の規則により定義する。

$$\frac{}{\mathtt{if\ true\ then\ t_2\ else\ t_3} \to \mathtt{t_2}} \quad \text{(E-IFTRUE)}$$

$$\frac{}{\mathtt{if\ false\ then\ t_2\ else\ t_3} \to \mathtt{t_3}} \quad \text{(E-IFFALSE)}$$

$$\frac{\mathtt{t_1} \to \mathtt{t_1'}}{\mathtt{if\ t_1\ then\ t_2\ else\ t_3} \to \mathtt{if\ t_1'\ then\ t_2\ else\ t_3}} \quad \text{(E-IF)}$$

$$\frac{\mathtt{t}_1 \to \mathtt{t}_1'}{\mathtt{succ}\ \mathtt{t}_1 \to \mathtt{succ}\ \mathtt{t}_1'}\ \text{(E-SUCC)} \qquad \frac{}{\mathtt{pred}\ 0 \to 0}\ \text{(E-PREDZERO)}$$

$$\frac{}{\mathtt{pred}\ (\mathtt{succ}\ \mathtt{nv}_1) \to \mathtt{nv}_1}\ \text{(E-PREDSUCC)} \qquad \frac{\mathtt{t}_1 \to \mathtt{t}_1'}{\mathtt{pred}\ \mathtt{t}_1 \to \mathtt{pred}\ \mathtt{t}_1'}\ \text{(E-PRED)}$$

$$\frac{}{\mathtt{iszero}\ 0 \to \mathtt{true}}\ \text{(E-ISZEROZERO)}$$

$$\frac{}{\mathtt{iszero}\ (\mathtt{succ}\ \mathtt{nv}_1) \to \mathtt{false}}\ \text{(E-ISZEROSUCC)} \qquad \frac{\mathtt{t}_1 \to \mathtt{t}_1'}{\mathtt{iszero}\ \mathtt{t}_1 \to \mathtt{iszero}\ \mathtt{t}_1'}\ \text{(E-ISZERO)}$$

例 1. 算術式 `pred (succ (pred 0))` は `pred (succ 0)` へ 1 ステップ評価される。評価判定 `pred (succ (pred 0))` $\to$ `pred (succ 0)` の導出木は以下の通りである。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\mathtt{pred}\ 0 \to 0}\ \text{(E-PREDZERO)}}{\mathtt{succ}\ (\mathtt{pred}\ 0) \to \mathtt{succ}\ 0}\ \text{(E-SUCC)}}{\mathtt{pred}\ (\mathtt{succ}\ (\mathtt{pred}\ 0)) \to \mathtt{pred}\ (\mathtt{succ}\ 0)}\ \text{(E-PRED)}$$

`pred (succ 0)` はさらに E-PREDSUCC 規則により `0` へ 1 ステップ評価される。つまり、算術式 `pred (succ (pred 0))` は `0` へ 2 ステップで（1 ステップ評価 2 回で）評価される。

(注意) E-PREDSUCC 規則を使って `pred (succ (pred 0))` を `pred 0` へ 1 ステップ評価することはできない。これは、メタ変数 $\mathtt{nv}_1$ は数値 (numeric value) のみを表し、`pred 0` が数値ではないことによる。

練習問題 1. 算術式 `pred (pred (succ (pred 0)))` を 1 ステップ評価せよ。

練習問題 2. 算術式 `pred (pred (succ (pred 0)))` を正規形になるまで評価せよ。

算術式の定義から、`succ false` は算術式である。これは、上で述べた算術式評価規則ではこれ以上評価することができない。つまり `succ false` は正規形である。（このようなものを算術式から除外したい場合は型システムを導入すればよい。）

定義 2. term(ここでは算術式) が正規形であり値ではない場合、*stuck* したという。

上記のような評価規則による意味定義は *small-step semantics* と呼ばれる。この講義では主に small-step semantics を説明するが、これに対し、*big-step semantics*（あるいは *natural semantics*、**自然意味論**）と言われる意味定義がある。算術式の意味を以下のような評価規則で定義することができ、このようなものが big-step semantics である。

$$\frac{}{\mathtt{v} \Downarrow \mathtt{v}}\ \text{(B-VALUE)}$$

$$\frac{\mathtt{t}_1 \Downarrow \mathtt{true} \qquad \mathtt{t}_2 \Downarrow \mathtt{v}_2}{\mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3 \Downarrow \mathtt{v}_2}\ \text{(B-IFTRUE)} \qquad \frac{\mathtt{t}_1 \Downarrow \mathtt{false} \qquad \mathtt{t}_3 \Downarrow \mathtt{v}_3}{\mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3 \Downarrow \mathtt{v}_3}\ \text{(B-IFFALSE)}$$

$$\frac{\mathtt{t}_1 \Downarrow \mathtt{nv}_1}{\mathtt{succ}\ \mathtt{t}_1 \Downarrow \mathtt{succ}\ \mathtt{nv}_1}\ \text{(B-SUCC)} \qquad \frac{\mathtt{t}_1 \Downarrow 0}{\mathtt{pred}\ \mathtt{t}_1 \Downarrow 0}\ \text{(B-PREDZERO)}$$

$$\frac{\mathtt{t}_1 \Downarrow \mathtt{succ}\ \mathtt{nv}_1}{\mathtt{pred}\ \mathtt{t}_1 \Downarrow \mathtt{nv}_1}\ \text{(B-PREDSUCC)} \qquad \frac{\mathtt{t}_1 \Downarrow 0}{\mathtt{iszero}\ \mathtt{t}_1 \Downarrow \mathtt{true}}\ \text{(B-ISZEROZERO)}$$

$$\frac{\mathtt{t}_1 \Downarrow \mathtt{succ}\ \mathtt{nv}_1}{\mathtt{iszero}\ \mathtt{t}_1 \Downarrow \mathtt{false}}\ \text{(B-ISZEROSUCC)}$$

例 2. 算術式 pred (succ (pred 0)) を上記の評価規則で評価すると 0 が得られる。評価判定 pred (succ (pred 0)) $\Downarrow$ 0 の導出木は以下の通りである。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathtt{0} \Downarrow \mathtt{0}}\ \text{(B-VALUE)}}{\mathtt{pred\ 0} \Downarrow \mathtt{0}}\ \text{(B-PREDZERO)}}{\mathtt{succ\ (pred\ 0)} \Downarrow \mathtt{succ\ 0}}\ \text{(B-SUCC)}}{\mathtt{pred\ (succ\ (pred\ 0))} \Downarrow \mathtt{0}}\ \text{(B-PREDSUCC)}$$

練習問題 3. 算術式 pred (pred (succ (pred 0))) を上記の評価規則 (*big-step semantics* の方) で評価せよ。

今回提示した算術式の small-step semantics と big-step semantics は一致する。つまり、$\mathtt{t} \to^* \mathtt{v} \iff \mathtt{t} \Downarrow \mathtt{v}$ である。このことの証明はこの講義では行わない。

A ブール式の 1 ステップ評価がブール式の大きさを減少させることの証明

ブール式の評価の停止性の証明のところで、ブール式の 1 ステップ評価はブール式の大きさを減少させるという記述があるが、これを証明する。まず、ブール式の大きさは第 2 回に提示した *size* 関数を用いる。*size* 関数の定義からブール式の部分 (true, false, if 式) を抜き出したものを示す。

$$\begin{aligned}
&size(\mathtt{true}) = 1\\
&size(\mathtt{false}) = 1\\
&size(\mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3) = size(\mathtt{t}_1) + size(\mathtt{t}_2) + size(\mathtt{t}_3) + 1
\end{aligned}$$

命題 1.

$$P(\mathtt{t}) : \forall \mathtt{t}'.\ \mathtt{t} \to \mathtt{t}' \Longrightarrow size(\mathtt{t}) > size(\mathtt{t}')$$

としたとき、$\forall \mathtt{t}.\ P(\mathtt{t})$ が成立する。

以下でこの命題の証明をするが、任意のブール式 t について、$size(\mathtt{t}) \geq 1$ が成立することを用いる。(この性質は、ブール式の構造に関する帰納法で証明できるが、この証明は省略する。)

証明. $\forall \mathtt{t}.\ P(\mathtt{t})$ を t の構造に関する帰納法で証明する。$\mathtt{t} = \mathtt{true}$ の場合、true は正規形であり、$\mathtt{t} \to \mathtt{t}'$ となる $\mathtt{t}'$ は存在しない (ので前提部分が成立しない)。$\mathtt{t} = \mathtt{false}$ の場合、false は正規形であり、$\mathtt{t} \to \mathtt{t}'$ となる $\mathtt{t}'$ は存在しない (ので前提部分が成立しない)。$\mathtt{t} = \mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3$ の形の場合、$\mathtt{t}_1$ の形でさらに場合分けする。$\mathtt{t}_1 = \mathtt{true}$ の場合、E-IFTRUE 規則により $\mathtt{t} \to \mathtt{t}_2$ である。算術式 $\mathtt{t}, \mathtt{t}_2$ の大きさについて、

$$\begin{aligned}
size(\mathtt{t}) &= size(\mathtt{if\ true\ then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3)\\
&= size(\mathtt{true}) + size(\mathtt{t}_2) + size(\mathtt{t}_3) + 1\\
&= 1 + size(\mathtt{t}_2) + size(\mathtt{t}_3) + 1\\
&= size(\mathtt{t}_2) + size(\mathtt{t}_3) + 2\\
&> size(\mathtt{t}_2)
\end{aligned}$$

より、$size(\texttt{t}) > size(\texttt{t}_2)$ の関係が成立する。$\texttt{t}_1 = \texttt{false}$ の場合、E-IFFALSE 規則により、$\texttt{t} \to \texttt{t}_3$ である。算術式 $\texttt{t}, \texttt{t}_3$ の大きさについて、

$$\begin{aligned}
size(\texttt{t}) &= size(\texttt{if true then t}_2\texttt{ else t}_3) \\
&= size(\texttt{true}) + size(\texttt{t}_2) + size(\texttt{t}_3) + 1 \\
&= 1 + size(\texttt{t}_2) + size(\texttt{t}_3) + 1 \\
&= size(\texttt{t}_2) + size(\texttt{t}_3) + 2 \\
&> size(\texttt{t}_3) \qquad (size(\texttt{t}_2) \geq 1 \text{ なので})
\end{aligned}$$

より、$size(\texttt{t}) > size(\texttt{t}_3)$ の関係が成立する。$\texttt{t}_1$ が $\texttt{true}$ でも $\texttt{false}$ でもない場合、$\texttt{t}_1$ は値ではない。よって第 5 回の資料の定理 2 より $\texttt{t}_1$ は正規形ではない。つまり、何らかのブール式 $\texttt{t}'_1$ について $\texttt{t}_1 \to \texttt{t}'_1$ である。E-IF 規則より、

$$\frac{\texttt{t}_1 \to \texttt{t}'_1}{\texttt{t} \to \texttt{if t}'_1\texttt{ then t}_2\texttt{ else t}_3} \text{ (E-IF)}$$

となり、$\texttt{t} \to \texttt{if t}'_1\texttt{ then t}_2\texttt{ else t}_3$ である。（ブール式の 1 ステップ評価の一意性（第 4 回資料の定理 1）より、$\texttt{t}$ から 1 ステップ評価をして得られるブール式はこれのみである。）$\texttt{t}_1 \to \texttt{t}'_1$ および帰納法の仮定より、$size(\texttt{t}_1) > size(\texttt{t}'_1)$ が成り立つ。これを用いると、算術式 $\texttt{t}, \texttt{if t}'_1\texttt{ then t}_2\texttt{ else t}_3$ の大きさについて、

$$\begin{aligned}
size(\texttt{t}) &= size(\texttt{if t}_1\texttt{ then t}_2\texttt{ else t}_3) \\
&= size(\texttt{t}_1) + size(\texttt{t}_2) + size(\texttt{t}_3) + 1 \\
&> size(\texttt{t}'_1) + size(\texttt{t}_2) + size(\texttt{t}_3) + 1 \\
&= size(\texttt{if t}'_1\texttt{ then t}_2\texttt{ else t}_3)
\end{aligned}$$

より、$size(\texttt{t}) > size(\texttt{if t}'_1\texttt{ then t}_2\texttt{ else t}_3)$ の関係が成立する。

以上より、$\texttt{t}$ の構造に関する帰納法より、$\forall \texttt{t}.\ P(\texttt{t})$ が成立する。 □