

ソフトウェア構成特論 第5回補足資料

大学院理工学研究科 電気電子情報工学専攻 篠埜 功

2014年5月15日

ブール式の評価の停止性の証明のところで、ブール式の1ステップ評価はブール式の大きさを減少させるという記述があるが、これを証明する。まず、ブール式の大きさは第2回に提示した *size* 関数を用いる。*size* 関数の定義をここに再掲する。

$$\begin{aligned}size(\text{true}) &= 1 \\size(\text{false}) &= 1 \\size(0) &= 1 \\size(\text{succ } t_1) &= size(t_1) + 1 \\size(\text{pred } t_1) &= size(t_1) + 1 \\size(\text{iszero } t_1) &= size(t_1) + 1 \\size(\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3) &= size(t_1) + size(t_2) + size(t_3) + 1\end{aligned}$$

命題 1. 任意の算術式 t, t' について、 $t \rightarrow t' \implies size(t) > size(t')$ である。

証明. t の構造に関する帰納法で証明する。 $t = \text{true}$ の場合、 true は正規形であり、 $t \rightarrow t'$ となる t' は存在しない(ので前提部分が成立しない)。 $t = \text{false}$ の場合、 false は正規形であり、 $t \rightarrow t'$ となる t' は存在しない(ので前提部分が成立しない)。 $t = \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ の形の場合、 t_1 の形でさらに場合分けする。 $t_1 = \text{true}$ の場合、E-IFTRUE 規則により $t \rightarrow t_2$ である。算術式 t, t_2 の大きさについて、

$$\begin{aligned}size(t) &= size(\text{if true then } t_2 \text{ else } t_3) \\&= size(\text{true}) + size(t_2) + size(t_3) + 1 \\&= 1 + size(t_2) + size(t_3) + 1 \\&= size(t_2) + size(t_3) + 2 \\&> size(t_2)\end{aligned}$$

より、 $size(t) > size(t_2)$ の関係が成立する。 $t_1 = \text{false}$ の場合、E-IFFALSE 規則により、 $t \rightarrow t_3$ である。算術式 t, t_3 の大きさについて、

$$\begin{aligned}size(t) &= size(\text{if true then } t_2 \text{ else } t_3) \\&= size(\text{true}) + size(t_2) + size(t_3) + 1 \\&= 1 + size(t_2) + size(t_3) + 1 \\&= size(t_2) + size(t_3) + 2 \\&> size(t_3)\end{aligned}$$

より、 $size(t) > size(t_3)$ の関係が成立する。 t_1 が true でも false でもない場合、 t_1 は値ではない。よって第 5 回の資料の定理 2 より t_1 は正規形ではない。つまり、何らかのブール式 t'_1 について $t_1 \rightarrow t'_1$ である。E-IF 規則より、

$$\frac{t_1 \rightarrow t'_1}{t \rightarrow \text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3} \text{ (E-IF)}$$

となり、 $t \rightarrow \text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ である。(ブール式の 1 ステップ評価の一意性 (第 4 回資料の定理 1) より、 t から 1 ステップ評価をして得られるブール式はこれのみである。) $t_1 \rightarrow t'_1$ および帰納法の仮定より、 $size(t_1) > size(t'_1)$ が成り立つ。これを用いると、算術式 $t, \text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ の大きさについて、

$$\begin{aligned} size(t) &= size(\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3) \\ &= size(t_1) + size(t_2) + size(t_3) + 1 \\ &> size(t'_1) + size(t_2) + size(t_3) + 1 \\ &= size(\text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3) \end{aligned}$$

より、 $size(t) > size(\text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3)$ の関係が成立する。 □