ソフトウェア構成特論 第3回

大学院理工学研究科 電気電子情報工学専攻　篠埜 功

2014年4月24日

1　はじめに

今回は、集合の帰納的定義および帰納法について続きを解説する。目標としては、集合の帰納的定義とはどういうことかを理解し、算術式を例として帰納的に定義された集合のすべての要素について成り立つ性質を帰納法を用いて証明することを体験し、簡単な例について自分で証明ができるようになることを目指す。また整礎帰納法について紹介し、種々の帰納法がその具体例であることを説明する。

2　算術式の帰納的定義と直接的な定義について（復習）

前回、算術式を2通りの方法で定義し、それらが一致することを紹介した。

3　算術式の構造に関する帰納法（復習）

算術式は帰納的に定義されており、算術式に関する性質を証明する際に算術式の構造に関する帰納法を用いる。

3.1　算術式に関する関数の帰納的定義（復習）

算術式は帰納的に定義され、算術式を引数にとる関数を帰納的に定義することができる。例えば、算術式の中にある定数すべてからなる集合を返す関数 $consts$ や、算術式の大きさを返す関数 $size$、算術式の深さを返す関数 $depth$ が帰納的に定義されることを紹介した。

3.2　算術式上の関数の性質の帰納法による証明

算術式を引数にとる関数 $size$ と $consts$ について以下の関係が成り立つことを紹介した。

命題 1

$$|consts(\mathtt{t})| \leq size(\mathtt{t})$$

証明
算術式の構造に関する帰納法で証明する。（補助資料参照）

定理 1 (算術式の構造に関する帰納法)

$$
\begin{aligned}
& P(\mathtt{true}) \wedge P(\mathtt{false}) \wedge P(\mathtt{0}) \\
& \wedge\ \forall \mathtt{t}_1 \in \mathcal{T}.\ \{P(\mathtt{t}_1) \Rightarrow P(\mathtt{succ}\ \mathtt{t}_1)\} \\
& \wedge\ \forall \mathtt{t}_1 \in \mathcal{T}.\ \{P(\mathtt{t}_1) \Rightarrow P(\mathtt{pred}\ \mathtt{t}_1)\} \\
& \wedge\ \forall \mathtt{t}_1 \in \mathcal{T}.\ \{P(\mathtt{t}_1) \Rightarrow P(\mathtt{iszero}\ \mathtt{t}_1)\} \\
& \wedge\ \forall \mathtt{t}_1, \mathtt{t}_2, \mathtt{t}_3 \in \mathcal{T}.\ \{P(\mathtt{t}_1) \wedge P(\mathtt{t}_2) \wedge P(\mathtt{t}_3) \Rightarrow P(\mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3)\} \\
& \Longleftrightarrow \\
& \forall \mathtt{t}_1 \in \mathcal{T}.\ P(\mathtt{t}_1)
\end{aligned}
$$

補足 前回数学的帰納法は

$$\{P(0) \wedge \forall m \in \mathbf{Nat}.\ \{P(m) \Rightarrow P(m+1)\}\} \Rightarrow \forall n \in \mathbf{Nat}.\ P(n)$$

だと説明したが、右方向の implication だけではなく左方向も成り立つので、以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
& \{P(0) \wedge \forall m \in \mathbf{Nat}.\ \{P(m) \Rightarrow P(m+1)\}\} \\
& \Longleftrightarrow \\
& \forall n \in \mathbf{Nat}.\ P(n)
\end{aligned}
$$

練習問題 1 $\mathit{depth}(\mathtt{t}) \leq \mathit{size}(\mathtt{t})$ を算術式の構造に関する帰納法で証明せよ。

算術式の構造に関する帰納法や数学的帰納法、その他さまざまな帰納法は整礎帰納法の特別の場合であり、それを次節で説明する。

4 整礎帰納法 (well-founded induction)

上記で述べた数学的帰納法や構造帰納法は整礎帰納法の特別な場合である。整礎帰納法は整礎関係 (well-founded relation) が定義されている集合の要素について成り立つ性質を証明する際に用いる。整礎帰納法を理解すれば必要に応じて様々な帰納法を自分で作り上げて使うことができる。

定義 1 (整礎関係 (well-founded relation))
集合 A 上の二項関係 $\prec$ は、無限降下列（*infinite descending chain*）が存在しない場合、整礎（*well-founded*）であるという。

二項関係 $\prec$ が定義されている集合 A 上の無限降下列とは、$\prec$ の関係で左側に無限に続く集合 A の要素列である。つまり、

$$\cdots \prec a_i \prec \cdots \prec a_1 \prec a_0$$

のようなものである。

この定義から、整礎関係は irreflexive（非反射的）である。つまり、どの要素 a についても $a \prec a$ は成立しない。二項関係 $\prec$ が非反射的ではない場合は、何らかの要素 a について $a \prec a$ が成立し、

$$\cdots \prec a \prec \cdots \prec a \prec a$$

のような無限降下列が存在してしまう。

今後、二項関係 $\prec$ の反射的閉包 (reflexive closure) を $\preceq$ と書く。つまり、

$$a \preceq b \Longleftrightarrow a = b \ \vee \ a \prec b.$$

以下の命題が成り立つ。

命題 2 $\prec$ を集合 A 上の二項関係とする。A の任意の空でない部分集合 Q が極小（*minimal*）の要素を持つことは関係 $\prec$ が整礎であるための必要十分条件である。

ここで、集合 A の部分集合 Q の極小の要素とは、

$$m \in Q \wedge \{\forall b \in A.\ b \prec m \Rightarrow b \notin Q\}$$

を満たすような m である。

証明

まず十分条件であることを示す。集合 A のすべての空でない部分集合は極小要素を持つとする。ここで $\prec$ が整礎でないと仮定する。つまり、集合 A の要素からなる無限降下列 $\cdots \prec a_1 \prec a_0$ が存在すると仮定する。すると、これらの無限降下列の要素からなる集合 $\{a_i \mid i \in \mathbf{Nat}\}$ は極小要素を持たない空でない A の部分集合であり、矛盾する。したがって $\prec$ は整礎な関係である。これで十分条件であることが示された。

次に必要条件であることを示す。集合 A 上の関係 $\prec$ は整礎であるとする。Q を A の空でない部分集合とする。以下のようにして要素列を作る。a_0 を Q の任意の要素とし、a_0 から降下していく要素列 $a_n \prec \cdots \prec a_0$ が Q の内部に存在するとする。このとき、Q の内部に a_n より小さい要素 b は存在するか存在しないかのいずれかである。もし存在しなかったらその時点で Q の内部の a_0 から始まる降下する要素列の構築を終了する。もし存在すればその b を a_{n+1} とする。これを続けていく。関係 $\prec$ は整礎であるので、$\cdots \prec a_1 \prec a_0$ のような無限降下列は存在しないので、この a_0 から始まる降下列の構築はどこかで終わり、$a_m \prec \cdots \prec a_0$ の形をしており、$\forall b \prec a_m.\ b \notin Q$ が成り立つ。この a_m は集合 Q の極小要素である。これで必要条件であることが示された。 □

命題 2 より、集合 A 上の関係 $\prec$ について、集合 A の任意の空でない部分集合が $\prec$ に関して極小の要素を持つ場合、整礎である、と定義しても同じことである。こちらを整礎関係の定義にしている教科書もある。

整礎関係について、以下の定理が成り立つ。

定理 2 (整礎帰納法 (well-founded induction)) $\prec$ を集合 A 上の整礎関係とし、P を集合 A の要素に関する性質とする。この時以下が成り立つ。

$$\begin{array}{l} \forall a \in A.\ \{(\forall b \in A.\ b \prec a \Rightarrow P(b)) \Rightarrow P(a)\} \\ \Longleftrightarrow \\ \forall a \in A.\ P(a) \end{array}$$

証明

左方向は自明。以下で右方向を示す。まず $\forall a \in A.\ \{(\forall b \in A. b \prec a \Rightarrow P(b)) \Rightarrow P(a)\}$ を仮定する。さらに、何らかの $a \in A$ について $\neg P(a)$ が成立すると仮定する。すると集合 $\{a \in A \mid \neg P(a)\}$ は少なくとも１つの要素を持ち、空集合ではない。よって命題 2 より、集合 $\{a \in A \mid \neg P(a)\}$ には $\prec$ に関する極小の要素 m が存在する。つまり、集合 A の何らかの要素 m について、

$$m \in \{a \in A \mid \neg P(a)\} \wedge \Big(\forall b \in A.\ b \prec m \Rightarrow b \notin \{a \in A \mid \neg P(a)\}\Big)$$

が成立する。つまり、$\neg P(m)$ かつ $\forall b \in A.\ b \prec m \Rightarrow P(b)$ が成立する。$\forall b \in A.\ b \prec m \Rightarrow P(b)$ と仮定 $\forall a \in A.\ \{(\forall b \in A.\ b \prec a \Rightarrow P(b)) \Rightarrow P(a)\}$ より、$P(m)$ が成り立つ。これは $\neg P(m)$ と矛盾する。したがって、集合 A の任意の要素 a について $P(a)$ が成立する。つまり $\forall a \in A.\ P(a)$ が成立する。

例 1 二項関係 $\prec$ を自然数の successor 関係とする。つまり、

$$n \prec m \Longleftrightarrow m = n + 1$$

と $\prec$ を定義すると、この関係 $\prec$ は整礎関係であり、この場合の整礎帰納法が数学的帰納法である。

例 2 自然数上の二項関係 $<$ は整礎関係である。この場合の整礎帰納法が累積帰納法 (course-of-values induction あるいは complete induction) である。

例 3 算術式 a が算術式 b の直接の部分式 (immediate subexpression) である関係を $a \prec b$ と定義すると、この関係 $\prec$ は整礎関係である。この場合の整礎帰納法は構造帰納法である。

5 補足

二項関係が反射的、あるいは非反射的であることの定義を以下に示しておく。

定義 2 集合 A 上の二項関係 R は、

$$\forall x \in A.\ (xRx)$$

が成り立つとき、*reflexive*（**反射的**）であるという。

定義 3 集合 A 上の二項関係 R は、

$$\forall x \in A.\ \neg(xRx)$$

が成り立つとき、*irreflexive*（**非反射的**）であるという。