

ソフトウェア構成特論 第3回 練習問題1の解答例

大学院理工学研究科 電気電子情報工学専攻 篠埜 功

2014年4月24日

練習問題 1 $depth(t) \leq size(t)$ を算術式の構造に関する帰納法で証明せよ。

証明

証明する性質 $depth(t) \leq size(t)$ を $P(t)$ と書く。算術式の構造に関する帰納法で証明する。

$t = \text{true}$ の場合:

$$\text{LHS} = depth(\text{true}) = 1$$

$$\text{RHS} = size(\text{true}) = 1$$

よって $\text{LHS} \leq \text{RHS}$ 。つまり $P(\text{true})$ が成立する。

$t = \text{false}$ の場合: $t = \text{true}$ の場合と同様。

$t = 0$ の場合: $t = \text{true}$ の場合と同様。

$t = \text{succ } t_1$ の場合: $P(t_1)$ の成立を仮定する。つまり、 $depth(t_1) \leq size(t_1)$ を仮定する。

$$\text{LHS} = depth(\text{succ } t_1)$$

$$= depth(t_1) + 1$$

$$\leq size(t_1) + 1$$

$$\text{RHS} = size(\text{succ } t_1)$$

$$= size(t_1) + 1$$

以上より $\text{LHS} \leq \text{RHS}$ 、つまり $P(\text{succ } t_1)$ が成立する。

$t = \text{pred } t_1$ の場合: $t = \text{succ } t_1$ の場合と同様。

$t = \text{iszero } t_1$ の場合: $t = \text{succ } t_1$ の場合と同様。

$t = \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ の場合: $P(t_1), P(t_2), P(t_3)$ の成立を仮定する。つまり、 $depth(t_1) \leq size(t_1), depth(t_2) \leq size(t_2), depth(t_3) \leq size(t_3)$ を仮定する。

$$\text{LHS} = depth(\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3)$$

$$= \max\{depth(t_1), depth(t_2), depth(t_3)\} + 1$$

$$\leq depth(t_1) + depth(t_2) + depth(t_3) + 1$$

$$\leq size(t_1) + size(t_2) + size(t_3) + 1$$

$$= size(\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3)$$

$$= \text{RHS}$$

以上より $\text{LHS} \leq \text{RHS}$ 、つまり $P(\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3)$ が成立する。

よって算術式の構造に関する帰納法より、任意の算術式 t について $P(t)$ が成立する。