ソフトウェア構成特論 第2回 命題2の証明

大学院理工学研究科 電気電子情報工学専攻 篠埜 功

2014年4月17日

命題

$$|consts(\texttt{t})| \leq size(\texttt{t})$$

証明　証明したい命題は、以下の性質 P

$$P(\texttt{t}) : |consts(\texttt{t})| \leq size(\texttt{t})$$

が任意の $\texttt{t} \in \mathcal{T}$ について成立すること、つまり

$$\forall \texttt{t} \in \mathcal{T}.\ P(\texttt{t})$$

である。この命題を**算術式の構造に関する帰納法**で証明する。

$\texttt{t} = \texttt{true}$ の場合:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= |consts(\texttt{t})| = |consts(\texttt{true})| = 1 \\ \text{RHS} &= size(\texttt{t}) = size(\texttt{true}) = 1 \end{aligned}$$

よって $P(\texttt{true})$ が成立する。

$\texttt{t} = \texttt{false}$ の場合:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= |consts(\texttt{t})| = |consts(\texttt{false})| = 1 \\ \text{RHS} &= size(\texttt{t}) = size(\texttt{false}) = 1 \end{aligned}$$

よって $P(\texttt{false})$ が成立する。

$\texttt{t} = \texttt{0}$ の場合:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= |consts(\texttt{t})| = |consts(\texttt{0})| = 1 \\ \text{RHS} &= size(\texttt{t}) = size(\texttt{0}) = 1 \end{aligned}$$

よって $P(\texttt{0})$ が成立する。

$\texttt{t} = \texttt{succ t}_1$ の場合:

$P(\texttt{t}_1)$ の成立を仮定する。つまり、

$$|consts(\texttt{t}_1)| \leq size(\texttt{t}_1)$$

を仮定する。この仮定のもとで $P(t)$ を示したい。つまり、

$$|consts(\texttt{t})| \leq size(\texttt{t})$$

を示したい。

$$\begin{array}{rcl}
\text{LHS} & = & |consts(\mathtt{t})| \\
& = & |consts(\mathtt{succ}\ \mathtt{t}_1)| \\
& = & |consts(\mathtt{t}_1)| \\
& \leq & size(\mathtt{t}_1) \\
& < & size(\mathtt{t}_1) + 1 \\
& = & size(\mathtt{succ}\ \mathtt{t}_1) \\
& = & size(\mathtt{t}) \\
& = & \text{RHS}
\end{array}$$

よって $P(\mathtt{t})$ が成立する。

$\mathtt{t} = \mathtt{pred}\ \mathtt{t}_1$ の場合:

$P(\mathtt{t}_1)$ の成立を仮定する。つまり、

$$|consts(\mathtt{t}_1)| \leq size(\mathtt{t}_1)$$

を仮定する。この仮定のもとで $P(t)$ を示したい。つまり、

$$|consts(\mathtt{t})| \leq size(\mathtt{t})$$

を示したい。

$$\begin{array}{rcl}
\text{LHS} & = & |consts(\mathtt{t})| \\
& = & |consts(\mathtt{pred}\ \mathtt{t}_1)| \\
& = & |consts(\mathtt{t}_1)| \\
& < & |consts(\mathtt{t}_1)| + 1 \\
& \leq & size(\mathtt{t}_1) + 1 \\
& = & size(\mathtt{pred}\ \mathtt{t}_1) \\
& = & size(\mathtt{t}) \\
& = & \text{RHS}
\end{array}$$

よって $P(\mathtt{t})$ が成立する。

$\mathtt{t} = \mathtt{iszero}\ \mathtt{t}_1$ の場合:

$P(\mathtt{t}_1)$ の成立を仮定する。つまり、

$$|consts(\mathtt{t}_1)| \leq size(\mathtt{t}_1)$$

を仮定する。この仮定のもとで $P(t)$ を示したい。つまり、

$$|consts(\mathtt{t})| \leq size(\mathtt{t})$$

を示したい。

$$\begin{array}{rcl}
\text{LHS} & = & |consts(\mathtt{t})| \\
& = & |consts(\mathtt{iszero}\ \mathtt{t}_1)| \\
& = & |consts(\mathtt{t}_1)| \\
& < & |consts(\mathtt{t}_1)| + 1 \\
& \leq & size(\mathtt{t}_1) + 1 \\
& = & size(\mathtt{iszero}\ \mathtt{t}_1) \\
& = & size(\mathtt{t}) \\
& = & \text{RHS}
\end{array}$$

よって $P(\mathtt{t})$ が成立する。

$\mathtt{t} = \mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3$ の場合:

$P(\mathtt{t}_1)$, $P(\mathtt{t}_2)$, $P(\mathtt{t}_3)$ の成立を仮定する。つまり、

$$
\begin{aligned}
|consts(\mathtt{t}_1)| \leq size(\mathtt{t}_1) \\
|consts(\mathtt{t}_2)| \leq size(\mathtt{t}_2) \\
|consts(\mathtt{t}_3)| \leq size(\mathtt{t}_3)
\end{aligned}
$$

を仮定する。この仮定のもとで $P(t)$ を示したい。つまり、

$$
|consts(\mathtt{t})| \leq size(\mathtt{t})
$$

を示したい。

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{LHS} & = & |consts(\mathtt{t})| \\
 & = & |consts(\mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3)| \\
 & = & |consts(\mathtt{t}_1) \cup consts(\mathtt{t}_2) \cup consts(\mathtt{t}_3)| \\
 & \leq & |consts(\mathtt{t}_1)| + |consts(\mathtt{t}_2)| + |consts(\mathtt{t}_3)| \\
 & \leq & size(\mathtt{t}_1) + size(\mathtt{t}_2) + size(\mathtt{t}_3) \\
 & < & size(\mathtt{t}_1) + size(\mathtt{t}_2) + size(\mathtt{t}_3) + 1 \\
 & = & size(\mathtt{if}\ \mathtt{t}_1\ \mathtt{then}\ \mathtt{t}_2\ \mathtt{else}\ \mathtt{t}_3) \\
 & = & size(\mathtt{t}) \\
 & = & \mathrm{RHS}
\end{array}
$$

よって $P(\mathtt{t})$ が成立する。

以上より、算術式の構造に関する帰納法により、$\forall \mathtt{t} \in \mathcal{T}.\ P(\mathtt{t})$ が成立する。