

レポート課題2の類似問題の解答例

情報工学科 篠埜 功

2014年6月23日

類似問題 関数 $f(x) = x^2$ を区間 $[-\pi, \pi]$ においてフーリエ級数展開し、 $\cos 5x, \sin 5x$ の項までの部分

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_5 \cos 5x + b_5 \sin 5x$$

と関数 $f(x)$ を重ねてグラフ表示せよ。計算の途中経過も記述せよ。

解答例 まず、 $\{\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$ の線形結合

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos x + b_k \sin x)$$

のうち、関数 $f(x)$ に最も近いものを求める。近さの尺度は、

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos x + b_k \sin x) - f(x) \right\}^2 dx$$

である。この J を $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ で偏微分して0とおいて各係数を求めてもよいが、ここでは教科書例2.4のやり方による解法を示す。仮に、

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos x + b_k \sin x) \quad (1)$$

とおく。(1)の両辺を区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0 dx \\ &= a_0 \pi \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

となる。

(1) の両辺に $\cos kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx \\ &= a_k \pi\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[x^2 \frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\sin kx}{k} dx \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx \quad \left(\left[x^2 \frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} \text{ は } 0 \text{ なので} \right)\end{aligned}$$

である。ここで、 $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx$ を別に計算すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx &= \left[x \frac{-\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos kx}{k} dx \\ &= -\frac{1}{k} [x \cos kx]_{-\pi}^{\pi} \quad \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos kx}{k} dx \text{ は } 0 \text{ なので} \right) \\ &= -\frac{1}{k} (\pi \cos \pi k - (-\pi) \cos(-\pi k)) \\ &= -\frac{1}{k} (\pi \cos \pi k + \pi \cos \pi k) \\ &= -\frac{2\pi}{k} \cos \pi k \\ &= -\frac{2\pi}{k} (-1)^k\end{aligned}$$

である。よって、 a_k の計算の続きをすると、

$$\begin{aligned}a_k &= -\frac{2}{\pi k} \left(-\frac{2\pi}{k} (-1)^k \right) \\ &= \frac{4}{k^2} (-1)^k\end{aligned}$$

となる。

(1) の両辺に $\sin kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx \\ &= b_k \pi\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx \\ &= 0 \quad (x^2 \sin kx \text{ は奇関数なので}) \end{aligned}$$

となる。

以上をまとめると、 $f(x)$ に最も近い線形結合は

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^n \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx$$

である。

$f(x) = x^2$ のフーリエ級数展開は、上記で得られた線形結合の n を大きくしたときの極限であり、

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx$$

である。

このフーリエ級数の $\cos 5x$ の項までの部分 and は

$$\frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{4}{25} \cos 5x$$

であり、 $f(x) = x^2$ とともに区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で図示すると図 1 のようになる。

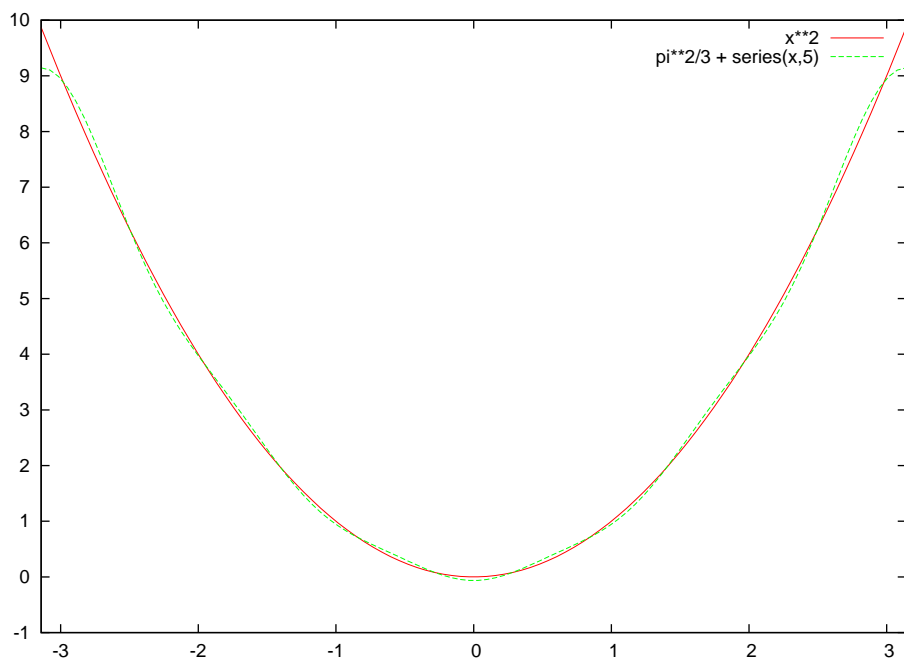


図 1: $f(x) = x^2$ とそのフーリエ級数の $\cos 5x$ の項までの部分和の比較