中間試験解答例

情報工学科　篠埜 功

2014年6月2日

問1（10点） 以下の3点に最も近い1次関数（直線）を求め、3点とともに図示せよ。近さの尺度としては、y座標の差の2乗の和 (の半分) を用いよ。

$$(0,0),(1,1),(3,4)$$

（解答例）求める関数を$f(x)=ax+b$、与えられた3点を$(x_1,y_1)=(0,0),(x_2,y_2)=(1,1),(x_3,y_3)=(3,4)$とおく。関数$f(x)$と3点の$y$座標の差の2乗和の半分

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(f(x_i)-y_i)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2$$

を最小にするようなa,bを求めればよい。Jを最小にするには、Jのa,bでの偏微分が0になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0,\frac{\partial J}{\partial b}=0$$

を解けばよい。まず、aでの偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial a}(ax_i+b-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}2(ax_i+b-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i^2+bx_i-x_iy_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{3}x_i^2+b\sum_{i=1}^{3}x_i-\sum_{i=1}^{3}x_iy_i
\end{aligned}$$

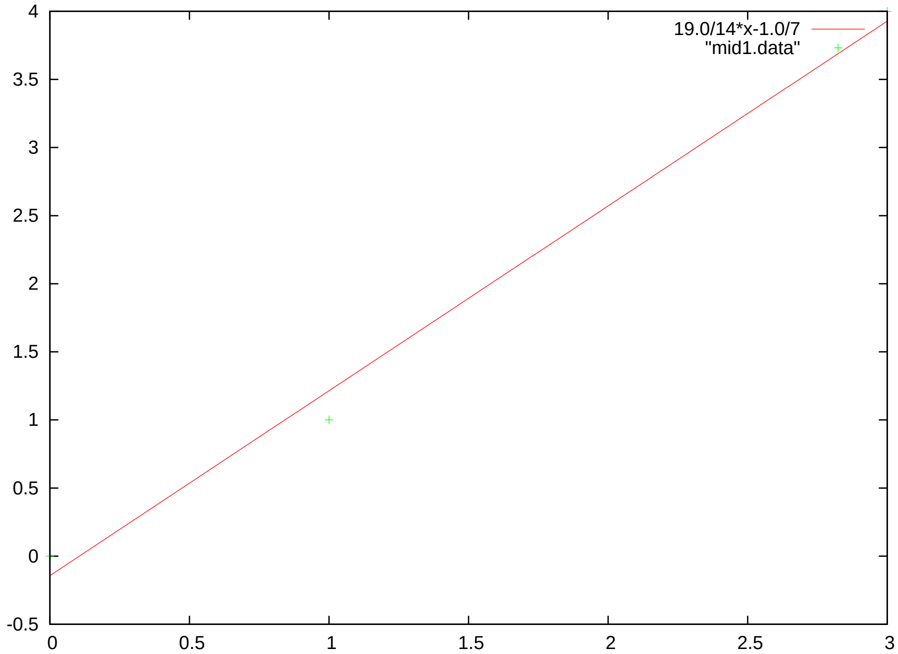

図 1: $f(x) = \dfrac{19}{14}x - \dfrac{1}{7}$ と与えられた 3 点の比較

である。次に、b での偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial b}(ax_i + b - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}2(ax_i + b - y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{3}x_i + b\sum_{i=1}^{3}1 - \sum_{i=1}^{3}y_i
\end{aligned}
$$

である。これらを 0 とおくと、

$$
\begin{aligned}
10a + 4b - 13 &= 0 \\
4a + 3b - 5 &= 0
\end{aligned}
$$

が得られ、これを解くと、$a = \dfrac{19}{14}, b = -\dfrac{1}{7}$ となる。よって求める関数は、

$$
f(x) = \frac{19}{14}x - \frac{1}{7}
$$

である。これを 3 点とともに図示すると図 1 のようになる。図 1 において、緑色の + 記号が与えられた点であり、赤色の直線が上記の 1 次関数 $f(x)$ である。

問 2（10 点） 以下の 3 点に最も近い 1 次関数（直線）を求め、3 点とともに図示せよ。近さの尺度としては、y 座標の差の 2 乗の和 (の半分) を用いよ。

$$(0,1),(1,0),(2,-2)$$

（解答例）求める関数を $f(x)=ax+b$、与えられた 3 点を $(x_1,y_1)=(0,1),(x_2,y_2)=(1,0),(x_3,y_3)=(2,-2)$ とおく。関数 $f(x)$ と 3 点の y 座標の差の 2 乗和の半分

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(f(x_i)-y_i)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2$$

を最小にするような a,b を求めればよい。J を最小にするには、J の a,b での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0,\frac{\partial J}{\partial b}=0$$

を解けばよい。まず、a での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial a}(ax_i+b-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}2(ax_i+b-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i^2+bx_i-x_iy_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{3}x_i^2+b\sum_{i=1}^{3}x_i-\sum_{i=1}^{3}x_iy_i
\end{aligned}$$

である。次に、b での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial b}(ax_i+b-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}2(ax_i+b-y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{3}x_i+b\sum_{i=1}^{3}1-\sum_{i=1}^{3}y_i
\end{aligned}$$

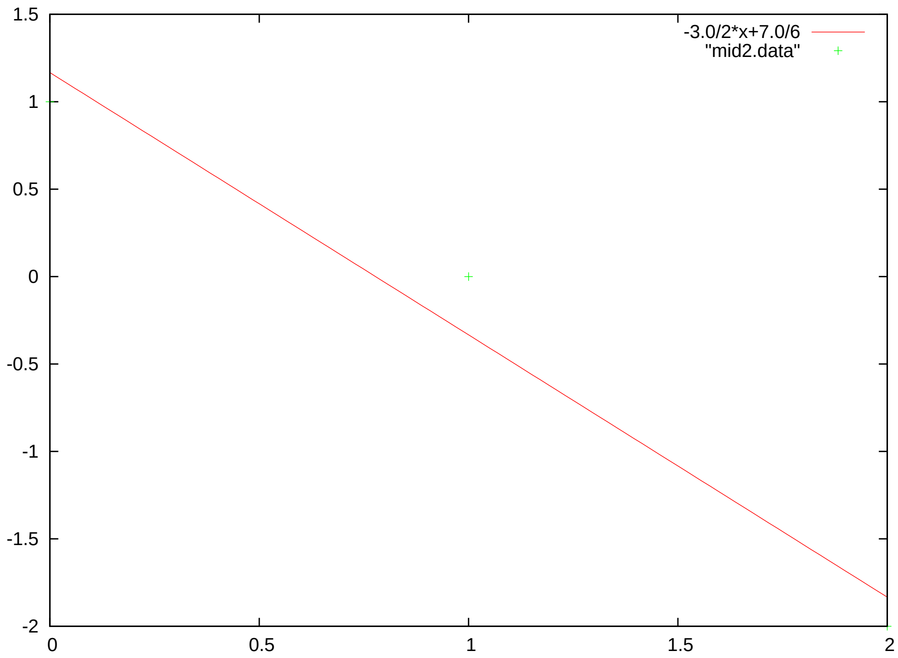

図 2: $f(x) = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{6}$ と与えられた 3 点の比較

である。これらを 0 とおくと、

$$\begin{aligned} 5a + 3b + 4 &= 0 \\ 3a + 3b + 1 &= 0 \end{aligned}$$

が得られ、これを解くと、$a = -\dfrac{3}{2}, b = \dfrac{7}{6}$ となる。よって求める関数は、

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{6}$$

である。これを 3 点とともに図示すると図 2 のようになる。図 2 において、緑色の + 記号が与えられた点であり、赤色の直線が上記の 1 次関数 $f(x)$ である。

問 3（10 点）　以下の 4 点に最も近い 2 次関数を求め、4 点とともに図示せよ。近さの尺度としては、y 座標の差の 2 乗の和 (の半分) を用いよ。

$$(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 1)$$

（解答例）求める関数を $f(x) = ax^2 + bx + c$、与えられた 4 点を $(x_1, y_1) = (-1, 0), (x_2, y_2) = (0, -1), (x_3, y_3) = (1, 0), (x_4, y_4) = (2, 1)$ とおく。関数 $f(x)$ と 4 点の y 座標の差の 2 乗和の半分

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(f(x_i) - y_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

を最小にするような a, b, c を求めればよい。J を最小にするには、J の a, b, c での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c} = 0$$

を解けばよい。まず、a での偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial a}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)\frac{\partial}{\partial a}(ax_i^2+bx_i+c-y_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^4+bx_i^3+cx_i^2-x_i^2y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{4}x_i^4+b\sum_{i=1}^{4}x_i^3+c\sum_{i=1}^{4}x_i^2-\sum_{i=1}^{4}x_i^2y_i
\end{aligned}
$$

である。次に、b での偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial b}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)\frac{\partial}{\partial b}(ax_i^2+bx_i+c-y_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^3+bx_i^2+cx_i-x_iy_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{4}x_i^3+b\sum_{i=1}^{4}x_i^2+c\sum_{i=1}^{4}x_i-\sum_{i=1}^{4}x_iy_i
\end{aligned}
$$

である。次に、c での偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial c}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)\frac{\partial}{\partial c}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)
\end{aligned}
$$

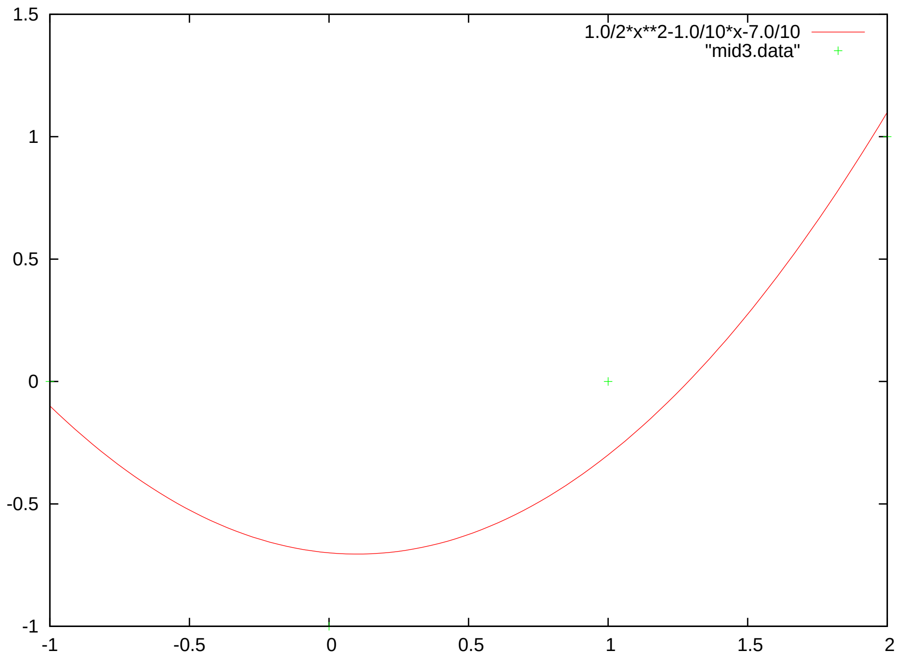

図 3: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{7}{10}$ と与えられた 4 点の比較

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)1 \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{4} x_i + c\sum_{i=1}^{4} 1 - \sum_{i=1}^{4} y_i
\end{aligned}
$$

である。これらを 0 とおくと、

$$
\begin{aligned}
18a + 8b + 6c - 4 &= 0 \quad \cdots (1) \\
8a + 6b + 2c - 2 &= 0 \quad \cdots (2) \\
6a + 2b + 4c &= 0 \quad \cdots (3)
\end{aligned}
$$

となる。これを解くと、

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{10}, \quad c = -\frac{7}{10}$$

を得る。以上より、求める関数は

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{7}{10}$$

である。これを 4 点とともに図示すると、図 3 のようになる。図 3 において、緑色の + 記号が与えられた点であり、赤色の曲線が上記の 2 次関数 $f(x)$ である。

問 4（10 点） 列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ を列ベクトル $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の

線形結合（$\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2$ の形）で近似せよ。つまり、$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2$ が $\boldsymbol{a}$ に最も近くなるような $c_1,\ c_2$ を求めよ。近さの尺度は差のノルムの 2 乗の半分、つまり

$$J = \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{a}\right\|^2$$

とせよ。ノルムの定義は、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} x_k^2}$$

である。

教科書 1.3.1 節のようにベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を変数のままで連立一次方程式にしてから数値を入れて解く方法（解答例 1）と、最初に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を具体的なベクトルに置き換えてしまう方法（解答例 2）の 2 通りの解法を示す。解答例 1 の方が見通しがよい。

（解答例 1）　まず J を展開すると

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{a}\right\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{a}, \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{a}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k, \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k\right) - 2\left(\boldsymbol{a}, \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k\right) + \|\boldsymbol{a}\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{2} c_k c_l (\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l) - 2\sum_{k=1}^{2} c_k (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_k) + \|\boldsymbol{a}\|^2\right\}
\end{aligned}$$

となる。これを c_i（$i = 1, 2$）で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c_i} &= \frac{\partial}{\partial c_i}\frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{2} c_k c_l (\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l) - 2\sum_{k=1}^{2} c_k (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_k) + \|\boldsymbol{a}\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{k,l=1}^{2} c_k c_l (\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l) - 2\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{k=1}^{2} c_k (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_k)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{2\sum_{k=1}^{2} c_k (\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_i) - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{2} c_k (\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_i) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i)
\end{aligned}$$

となる。よって、$\dfrac{\partial J}{\partial c_1} = 0$ と $\dfrac{\partial J}{\partial c_2} = 0$ をまとめて行列表現で書くと

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) & (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1) \\ (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) & (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_2) \end{pmatrix}$$

となる。これに問題の数値を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる。これを解くと、

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。以上より、$\boldsymbol{a}$ に最も近い $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の線形結合は、

$$4\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である。

（解答例 2） $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ に具体的な数値を代入して J を展開すると、

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2} \|c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{a}\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left\| c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 3 \\ c_1 - 2 \\ c_1 - 6 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left\{ c_1^2 + c_2^2 + 9 + 2c_1c_2 - 6c_1 - 6c_2 + c_1^2 - 4c_1 + 4 + c_1^2 - 12c_1 + 36 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 3c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 - 22c_1 - 6c_2 + 49 \right\}
\end{aligned}$$

となる。これを c_1, c_2 で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c_1} &= \frac{1}{2}\{6c_1 + 2c_2 - 22\} = 3c_1 + c_2 - 11 \\
\frac{\partial J}{\partial c_2} &= \frac{1}{2}\{2c_1 + 2c_2 - 6\} = c_1 + c_2 - 3
\end{aligned}$$

となる。これらを 0 とおくと以下の連立一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
3c_1 + c_2 &= 11 \\
c_1 + c_2 &= 3
\end{aligned}$$

これを解くと、$c_1 = 4, c_2 = -1$ となる。以上より、$\boldsymbol{a}$ に最も近い $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の線形結合は、

$$4\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である。