今日の練習問題の解答例

情報工学科　篠埜 功

2014 年 7 月 14 日

今日の練習問題の解答例を示す。

問　内積が

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

で定義された、区間 $-1 \le x \le 1$ 上の連続関数からなる計量空間において、区間 $-1 \le x \le 1$ 上の 4 つの連続関数 $u_1(x) = 1,\ u_2(x) = x,\ u_3(x) = x^2, u_4(x) = x^3$ にシュミットの直交化を施せ。

解答　まず、$e_1 = u_1$, つまり $e_1 = 1$ とする。

次に、$e_2 = u_2 - c_1 e_1$ とおき、これが e_1 と直交するように c_1 を定める。e_1 と e_2 の内積は

$$\begin{aligned}(e_1, e_2) &= (e_1, u_2 - c_1 e_1) \\ &= (e_1, u_2) - c_1(e_1, e_1)\end{aligned}$$

であり、これを 0 とおくと、

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{(e_1, u_2)}{(e_1, e_1)} \\ &= \frac{(1, x)}{(1, 1)} \\ &= \frac{\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって、

$$e_2 = x$$

である。

次に、$e_3 = u_3 - (c_1 e_1 + c_2 e_2)$ とおき、これが e_1, e_2 と直交するように c_1, c_2 を定める。e_1 と e_3 の内積は

$$\begin{aligned}(e_1, e_3) &= (e_1, u_3 - (c_1 e_1 + c_2 e_2)) \\ &= (e_1, u_3) - c_1(e_1, e_1)\end{aligned}$$

であり、これを 0 とおくと、

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(e_1, u_3)}{(e_1, e_1)} \\ &= \frac{(1, x^2)}{(1, 1)} \\ &= \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}x} \\ &= \frac{2/3}{2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。e_2 と e_3 の内積は

$$\begin{aligned} (e_2, e_3) &= (e_2, u_3 - (c_1 e_1 + c_2 e_2)) \\ &= (e_2, u_3) - c_2 (e_2, e_2) \end{aligned}$$

であり、これを 0 とおくと、

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{(e_2, u_3)}{(e_2, e_2)} \\ &= \frac{(x, x^2)}{(x, x)} \\ &= \frac{\int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって

$$e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$$

である。

　次に、$e_4 = u_4 - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)$ とおき、これが e_1, e_2, e_3 と直交するように c_1, c_2, c_3 を定める。e_1 と e_4 の内積は

$$\begin{aligned} (e_1, e_4) &= (e_1, u_4 - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)) \\ &= (e_1, u_4) - c_1 (e_1, e_1) \end{aligned}$$

であり、これを 0 とおくと、

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(e_1, u_4)}{(e_1, e_1)} \\ &= \frac{(1, x^3)}{(1, 1)} \\ &= \frac{\int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。e_2 と e_4 の内積は

$$\begin{aligned}(e_2, e_4) &= (e_2, u_4 - (c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3)) \\ &= (e_2, u_4) - c_2(e_2, e_2)\end{aligned}$$

であり、これを 0 とおくと、

$$\begin{aligned}c_2 &= \frac{(e_2, u_4)}{(e_2, e_2)} \\ &= \frac{(x, x^3)}{(x, x)} \\ &= \frac{\int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x} \\ &= \frac{2/5}{2/3} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

となる。e_3 と e_4 の内積は

$$\begin{aligned}(e_3, e_4) &= (e_3, u_4 - (c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3)) \\ &= (e_3, u_4) - c_3(e_3, e_3)\end{aligned}$$

であり、これを 0 とおくと、

$$\begin{aligned}c_3 &= \frac{(e_3, u_4)}{(e_3, e_3)} \\ &= \frac{(x^2 - \frac{1}{3}, x^3)}{(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3})} \\ &= \frac{\int_{-1}^{1} x^5 - \frac{1}{3}x^3 \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} \mathrm{d}x} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって

$$e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$$

以上より、$1, x, x^2, x^3$ にシュミットの直交化を施して得られた直交系は

$$1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3},\ x^3 - \frac{3}{5}x$$

である。

補足: この解答では正規化はしていないが、してもよい。