# 関数近似練習問題解答例

情報工学科 篠埜 功

2014年5月12日

この資料では今日の練習問題の解答例を示す。

**問**　関数 $\cos x$ に区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上で最も近い二次関数を求めよ。近さの尺度としては、$y$ 座標の差の 2 乗の区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ における積分（の半分）を用いよ。
**解答**　求める二次関数を $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。関数 $f(x)$ と $\cos x$ の $y$ 座標の差の 2 乗の区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ における積分の半分

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - \cos x\}^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

を最小にするような $a, b, c$ を求めればよい。$J$ を最小にするには、$J$ の $a, b, c$ での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c} = 0$$

を解けばよい。まず、$a$ での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a}\{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\{ax^2 + bx + c - \cos x\}x^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}x^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^4 + bx^3 + cx^2 - x^2\cos x\} \mathrm{d}x \\ &= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \mathrm{d}x + b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \mathrm{d}x + c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \mathrm{d}x - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x \mathrm{d}x \end{aligned}$$

である。ここでそれぞれの積分を計算すると、$x^4$ については、

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \mathrm{d}x &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \mathrm{d}x \quad (x^4\text{は偶関数なので}) \\ &= 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^5}{80}\end{aligned}$$

である。$x^3$ は奇関数なので、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \mathrm{d}x = 0$$

である。$x^2$ については、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^3}{12}$$

である。$x^2\cos x$ については、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x \mathrm{d}x \quad (x^2\cos x\text{ は偶関数なので})$$

である。まず、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x \mathrm{d}x$ を計算する。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x \mathrm{d}x &= \left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x \mathrm{d}x\end{aligned}$$

となる。ここで $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x \mathrm{d}x$ を計算する。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x \mathrm{d}x &= \left[x\frac{\cos x}{-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-1}\mathrm{d}x \\ &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

である。よって、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x \mathrm{d}x$ の続きの計算をすると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x \mathrm{d}x &= \frac{\pi^2}{4} - 2\cdot 1 \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2\end{aligned}$$

となる。よって、$\frac{\partial J}{\partial a}$ は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\pi^5}{80}a + \frac{\pi^3}{12}c - 2(\frac{\pi^2}{4} - 2) \\ &= \frac{\pi^5}{80}a + \frac{\pi^3}{12}c - \frac{\pi^2}{2} + 4\end{aligned}$$

となる。次に、$b$での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial b}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\{ax^2+bx+c-\cos x\}x\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}x\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^3+bx^2+cx-x\cos x\}\mathrm{d}x \\
&= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\mathrm{d}x+b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x+c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x \\
&= 2b\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x \quad (x^3, x, x\cos x\text{ は奇関数、}x^2\text{は偶関数なので}) \\
&= 2b\cdot\frac{\pi^3}{24} \\
&= \frac{\pi^3}{12}b
\end{aligned}$$

である。次に、$c$での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c}\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial c}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial c}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\{ax^2+bx+c-\cos x\}\cdot 1\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}\mathrm{d}x \\
&= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x+b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x+c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\ \mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x \\
&= 2a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x+\pi c-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x \\
&= 2a\cdot\frac{\pi^3}{24}+\pi c-2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^3}{12}a+\pi c-2
\end{aligned}$$

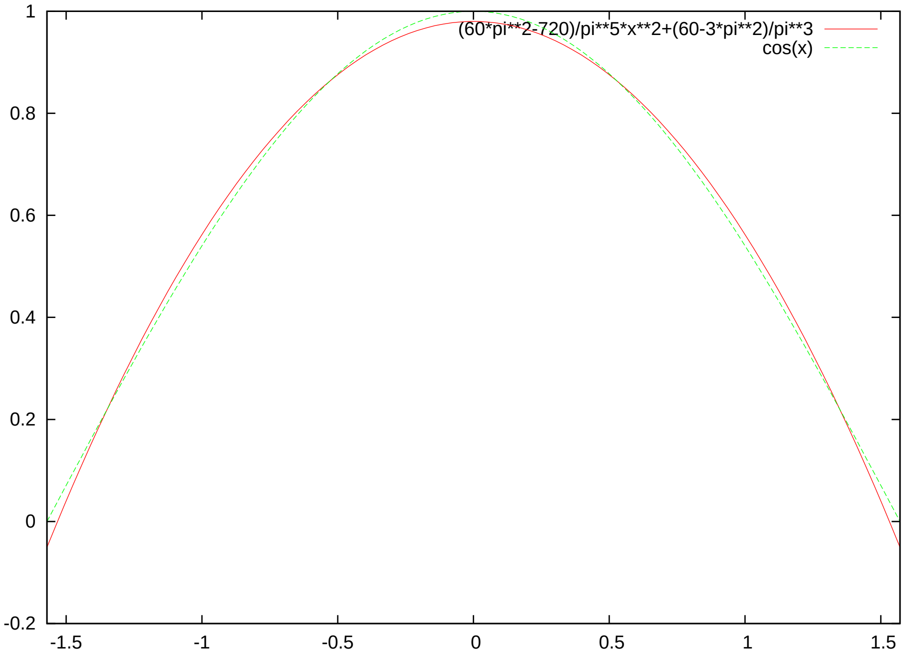


図 1: 関数 $\cos x$ に最も近い 2 次関数

である。これらを 0 とおくと、以下のような $a, b, c$ に関する連立一次方程式が得られる。

$$\frac{\pi^5}{80}a + \frac{\pi^3}{12}c - \frac{\pi^2}{2} + 4 = 0$$
$$\frac{\pi^3}{12}b = 0$$
$$\frac{\pi^3}{12}a + \pi c - 2 = 0$$

となる。これを解くと、

$$a = \frac{60\pi^2 - 720}{\pi^5}, \quad b = 0, \quad c = \frac{60 - 3\pi^2}{\pi^3}$$

となる。以上より、求める 2 次関数は

$$f(x) = \frac{60\pi^2 - 720}{\pi^5}x^2 + \frac{60 - 3\pi^2}{\pi^3}$$

である。これを関数 $\cos x$ とともに区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ において図示すると、図 1 のようになる。図 1 において、赤色の曲線が求めた 2 次関数であり、緑色の曲線が関数 $\cos x$ である。