応用数学 2014年度 第1回練習問題解答例

情報工学科　篠埜 功

2014年4月7日

問１（最小二乗法）

以下の３点に最も近い直線を求め、３点とともに図示せよ。近さの尺度としては講義で説明した、y 座標の差の２乗の和 (の半分) を用いよ。

$$(0,1),(1,0),(2,-2)$$

解答　求める関数を $f(x)=ax+b$、与えられた3点を $(x_1,y_1)=(0,1),(x_2,y_2)=(1,0),(x_3,y_3)=(2,-2)$ とおく。関数 $f(x)$ と3点の y 座標の差の2乗和の半分

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(f(x_i)-y_i)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2$$

を最小にするような a,b を求めればよい。J を最小にするには、J の a,b での偏微分が0になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0,\frac{\partial J}{\partial b}=0$$

を解けばよい。まず、a での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial a}(ax_i+b-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}2(ax_i+b-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i^2+bx_i-x_iy_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{3}x_i^2+b\sum_{i=1}^{3}x_i-\sum_{i=1}^{3}x_iy_i
\end{aligned}$$

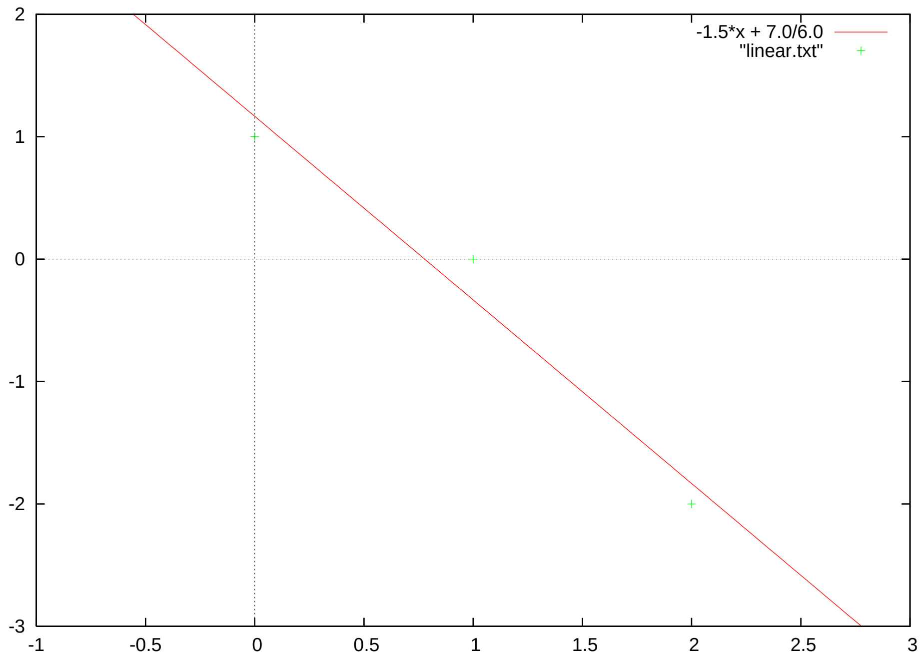

図 1: $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{6}$ と与えられた3点の比較

である。次に、b での偏微分は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial b}(ax_i + b - y_i)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}2(ax_i + b - y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i) \\ &= a\sum_{i=1}^{3}x_i + b\sum_{i=1}^{3}1 - \sum_{i=1}^{3}y_i\end{aligned}$$

である。これらを0とおくと、

$$\begin{aligned}5a + 3b + 4 &= 0 \\ 3a + 3b + 1 &= 0\end{aligned}$$

が得られ、これを解くと、$a = -\frac{3}{2}, b = \frac{7}{6}$ となる。よって求める関数は、

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{6}$$

である。これを3点とともに図示すると図1のようになる。