x^2 のフーリエ級数展開について

篠埜　功

2009 年 6 月 1 日

6 月 1 日の講義の最後に示した x^2 の区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ におけるフーリエ級数展開の計算が、符号が一か所間違っていた。以下において、正しい計算を、フーリエ級数展開の説明も含めて示す。

フーリエ級数展開とは、区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ において、与えられた関数 $f(x)$ を、直交関数系

$$\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$$

の線形結合で表そうとするものである。つまり、$f(x)$ を

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

のように表そうとするものである。計算については、講義で述べた通り、まず式 (1) の右辺の和を $k = n$ までの有限和にした、

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

と $f(x)$ との差の 2 乗を区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ において積分した値（の半分）

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - (\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)))^2 \mathrm{d}x$$

を最小にする係数 $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ を求める。これは講義で説明した最小二乗法であり、係数の値は、

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \mathrm{d}x \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

となる（計算過程はここでは省略する）。得られた $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ について、

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

は $f(x)$ に最も近い (J が最小の) 線形結合である。ここまでの手順は、任意の n について行うことができ、n を大きくしたときの極限

$$\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

を考えることができる。区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ における任意の連続 (かつなめらかな) 関数 $f(x)$ についてこの極限が存在し、$f(x)$ に一致する (ただし $f(-\pi) \neq f(\pi)$ の場合は、$x = \pi, x = -\pi$ においてはその中間の値になる) ことが知られている。これがフーリエ級数展開である。また、講義で紹介したとおり、

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

などのように、$x = \pi, x = -\pi$ 以外に不連続点があってもよく、その場合も、不連続点以外では $f(x)$ と一致し、不連続点においてはその不連続点における左右からの極限値の中間の値に収束する。

以下に、x^2 のフーリエ級数展開の具体的な計算を示す。(最小二乗法による計算の部分は省略し、その結果だけを用いている。)

a_0 は、x^2 を区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ において積分し、π で割ればよい。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\pi^2 \end{aligned}$$

a_k $(k \geq 1)$ については、x^2 に $\cos kx$ を掛けて、区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ において積分し、π で割ればよい。

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\left[x^2 \frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\sin kx}{k}\mathrm{d}x\right\} \\ &= -\frac{2}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \mathrm{d}x \qquad (\left[x^2 \frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} \text{ は } 0 \text{ なので}) \end{aligned}$$

ここで、$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \mathrm{d}x$ を別に計算すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \mathrm{d}x = \left[x \frac{-\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos kx}{k}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{k}\left[x\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} \qquad (\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos kx}{k}\mathrm{d}x\ \text{は}\ 0\ \text{なので})\\
&= -\frac{1}{k}(\pi\cos\pi k-(-\pi)\cos(-\pi k))\\
&= -\frac{1}{k}(\pi\cos\pi k+\pi\cos\pi k)\\
&= -\frac{2\pi}{k}\cos\pi k\\
&= -\frac{2\pi}{k}(-1)^k
\end{aligned}$$

である。よって、a_k の計算の続きをすると、

$$\begin{aligned}
a_k &= -\frac{2}{\pi k}(-\frac{2\pi}{k}(-1)^k)\\
&= \frac{4}{k^2}(-1)^k
\end{aligned}$$

となる。

b_k については、x^2 に $\sin kx$ を掛けて、区間 $-\pi \le x \le \pi$ において積分し、π で割ればよい。

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin kx\mathrm{d}x\\
&= 0 \quad (x^2\sin kx\ \text{は奇関数なので})
\end{aligned}$$

以上をまとめると、x^2 のフーリエ級数展開は、

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}(-1)^k\cos kx$$

である。x^2 は区間 $-\pi \le x \le \pi$ において連続であり、両端の値も一致しているため、区間 $-\pi \le x \le \pi$ において以下の等式が成立する。

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}(-1)^k\cos kx$$

(一般には、両端の値が異なったり、不連続点がある場合には、等式はそれら以外の点において成り立つ。) このフーリエ級数展開の最初の 3 項程度を具体的に書くと、

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4(-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+\cdots)$$

である。