中間試験解答例

情報工学科　篠埜 功

2019年5月27日

問1（10点）　3点 $(0,0),(1,1),(3,4)$ に最も近い1次関数を求めよ。近さの尺度としては、y 座標の差の2乗の和の半分を用いよ。

解答例　求める関数を $f(x)=ax+b$、与えられた3点を $(x_1,y_1)=(0,0),(x_2,y_2)=(1,1),(x_3,y_3)=(3,4)$ とおく。関数 $f(x)$ と3点の y 座標の差の2乗和の半分

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(f(x_i)-y_i)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2$$

を最小にするような a,b を求めればよい。J を最小にするには、J の a,b での偏微分が0になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0,\frac{\partial J}{\partial b}=0$$

を解けばよい。まず、a での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial a}(ax_i+b-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}2(ax_i+b-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i^2+bx_i-x_iy_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{3}x_i^2+b\sum_{i=1}^{3}x_i-\sum_{i=1}^{3}x_iy_i
\end{aligned}$$

である。次に、b での偏微分は、

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2\}$$

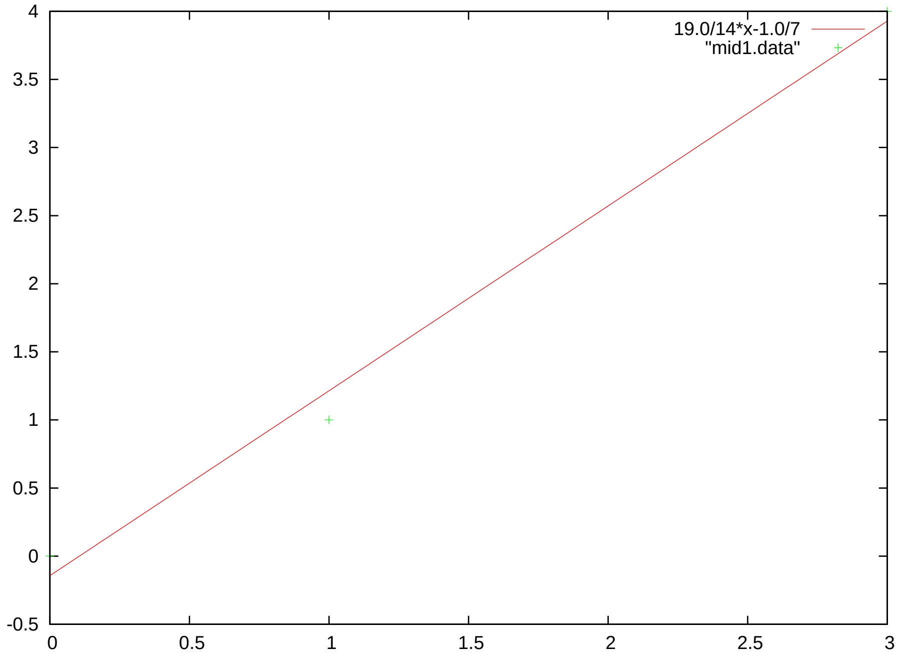

図 1: $f(x) = \dfrac{19}{14}x - \dfrac{1}{7}$ と与えられた 3 点の比較

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial b}(ax_i + b - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} 2(ax_i + b - y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{3} x_i + b\sum_{i=1}^{3} 1 - \sum_{i=1}^{3} y_i
\end{aligned}
$$

である。これらを 0 とおくと、

$$
\begin{aligned}
10a + 4b - 13 &= 0 \\
4a + 3b - 5 &= 0
\end{aligned}
$$

が得られ、これを解くと、$a = \dfrac{19}{14}, b = -\dfrac{1}{7}$ となる。よって求める関数は、

$$
f(x) = \frac{19}{14}x - \frac{1}{7}
$$

である。

補足　これを 3 点とともに図示すると図 1 のようになる。図 1 において、緑色の + 記号が与えられた点であり、赤色の直線が上記の 1 次関数 $f(x)$ である。

問 2（10 点）　4 点 $(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 1)$ に最も近い 2 次関数を求めよ。近さの尺度としては、y 座標の差の 2 乗の和の半分を用いよ。

解答例　練習問題 2 と同じです。

問 3（10 点）　列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ を列ベクトル $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の線形結合（$\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2$ の形）で近似せよ。つまり、$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2$ が $\boldsymbol{a}$ に最も近くなるような c_1, c_2 を求めよ。近さの尺度は差のノルムの 2 乗の半分、つまり $J = \dfrac{1}{2}\left\| \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{a} \right\|^2$ とせよ。ノルムの定義は、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のとき、$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} x_k^2}$ である。また、以下の正規方程式（normal equation）を使って良いものとする。

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) & (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1) \\ (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) & (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_2) \end{pmatrix}$$

解答例　練習問題 4 と同じです。

問 4（10 点）

関数 $\sin x$ に区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で最も近い 1 次関数を求めよ。近さの尺度としては、y 座標の差の 2 乗の区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ における積分（の半分）を用いよ。つまり、求める 1 次関数を $f(x) = ax + b$ としたとき、近さの尺度 J は

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - \sin x\}^2 \mathrm{d}x$$

とせよ。

解答例　例題 3 と同じです。

問 5（10 点）　以下の積分を計算せよ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \mathrm{d}x$$

解答例　cos の加法定理より、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

である。これらを足し合わせると

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

を得る。両辺を 2 で割ると

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$$

を得る。α と β を x とすると

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 0)\\ &= \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)\end{aligned}$$

となる。これを積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x + 1\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\Big\{\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}x\Big\}\\ &= \frac{1}{2}(0 + 2\pi)\\ &= \pi\end{aligned}$$

となる。