練習問題 9-2

情報工学科　篠埜 功

練習問題　練習問題 9-1 の計量空間において、関数 $f_1(x) = x$ と $f_2(x) = x^2$ について $\|\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2\|$ と $\|\boldsymbol{f}_1\| + \|\boldsymbol{f}_2\|$ を計算し、それらの値を比較せよ。

解答例

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2\| &= \sqrt{(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2)} \\
&= \sqrt{\int_0^1 \{(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2)(x)\}\{(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2)(x)\}\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\int_0^1 \{f_1(x) + f_2(x)\}\{f_1(x) + f_2(x)\}\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\int_0^1 (x + x^2)(x + x^2)\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\int_0^1 x^2 + 2x^3 + x^4\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}} \\
&= \sqrt{\frac{10 + 15 + 6}{30}} \\
&= \sqrt{\frac{31}{30}} \\
\|\boldsymbol{f}_1\| + \|\boldsymbol{f}_2\| &= \sqrt{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} + \sqrt{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2)} \\
&= \sqrt{\int_0^1 x^2\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_0^1 x^4\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1} + \sqrt{\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{5}}
\end{aligned}
$$

$\|\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2\|^2$ と $(\|\boldsymbol{f}_1\|+\|\boldsymbol{f}_2\|)^2$ を比較する。

$$
\begin{aligned}
(\|\boldsymbol{f}_1\|+\|\boldsymbol{f}_2\|)^2-\|\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2\|^2 &= \left(\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{31}{30}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+2\sqrt{\frac{1}{15}}-\frac{31}{30} \\
&= \frac{10+6-31}{30}+2\sqrt{\frac{1}{15}} \\
&= -\frac{15}{30}+2\sqrt{\frac{1}{15}} \\
&= 2\sqrt{\frac{1}{15}}-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

ここで、$\left(2\sqrt{\frac{1}{15}}\right)^2$ と $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ を比較する。

$$
\begin{aligned}
\left(2\sqrt{\frac{1}{15}}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{4}{15}-\frac{1}{4} \\
&= \frac{16-15}{60} \\
&= \frac{1}{60} \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

よって、$2\sqrt{\frac{1}{15}}-\frac{1}{2}\geq 0$ となり、

$$\|\boldsymbol{f}_1\|+\|\boldsymbol{f}_2\|\geq\|\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2\|$$

が成り立つ。

　以上により、上記の例について三角不等式（Triangle inequality）が成り立つことが確認された。