# 練習問題9-1

情報工学科　篠埜 功

**練習問題**　区間 $[0,1]$ 上のすべての実数値連続関数の集合を考える。以下の 2 つの演算（ベクトルの加算およびスカラー倍）は線形空間の公理を満たす。（ただし線形空間の公理については講義で説明しておらず講義の範囲外。）

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(x) &= f(x)+g(x)\\ (c\boldsymbol{f})(x) &= c(f(x))\end{aligned}$$

この線形空間で次の演算を考える。

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

この線形空間内の関数を、任意の 2 つの関数の組み合わせについて上記の演算（積分）が値を持つもののみに制限する[1]。するとこの演算は内積の公理を満たす。この演算を上記線形空間に導入することにより、計量空間が得られる。

この計量空間において、関数 $f_1(x)=x$ と $f_2(x)=x^2$ の内積およびそれらのノルムの積を計算し、比較せよ。

**解答例**

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2) &= \int_0^1 f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x^3\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{4}\\ \|\boldsymbol{f}_1\| &= \sqrt{(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_1)}\\ &= \sqrt{\int_0^1 x^2\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

[1] 積分が値を持つかどうかは被積分関数だけでなく、積分の定義にも依存する。解析の授業で習うリーマン積分や、数学科で習うようなルベーグ積分など、さまざまな積分の定義がある。当然これらについても講義の範囲外とする。実は、リーマン積分、ルベーグ積分において、有界閉区間上の連続関数は積分が値を持つので、これらの積分の定義を採用する場合、制限する必要はない。

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}} \\
\|\boldsymbol{f}_2\| &= \sqrt{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2)} \\
&= \sqrt{\int_0^1 x^4 \mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{5}}
\end{aligned}
$$

内積 $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ とノルムの積 $\|\boldsymbol{f}_1\| \cdot \|\boldsymbol{f}_2\|$ を比較すると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{f}_1\| \cdot \|\boldsymbol{f}_2\| &= \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{15}} \\
&\geq \sqrt{\frac{1}{16}} \\
&= \frac{1}{4} \\
&= (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)
\end{aligned}
$$

以上により、上記の例においてコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy-Schwarz inequality）が成り立つことが確認された。