応用数学 練習問題3 解答例

情報工学科　篠埜 功

問　関数 $\cos x$ に区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上で最も近い二次関数を求めよ。近さの尺度としては、y 座標の差の 2 乗の区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ における積分（の半分）を用いよ。
解答　求める二次関数を $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。関数 $f(x)$ と $\cos x$ の y 座標の差の 2 乗の区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ における積分の半分

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - \cos x\}^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

を最小にするような a, b, c を求めればよい。J を最小にするには、J の a, b, c での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$
\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c} = 0
$$

を解けばよい。まず、a での偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\,\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a}\{ax^2 + bx + c - \cos x\}^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\{ax^2 + bx + c - \cos x\}x^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^2 + bx + c - \cos x\}x^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{ax^4 + bx^3 + cx^2 - x^2\cos x\} \mathrm{d}x \\
&= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \mathrm{d}x + b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \mathrm{d}x + c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \mathrm{d}x - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

である。ここでそれぞれの積分を計算すると、x^4 については、

$$
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \mathrm{d}x \quad (x^4\text{は偶関数なので})
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^5}{80}
\end{aligned}
$$

である。x^3 は奇関数なので、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \mathrm{d}x = 0$$

である。x^2 については、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^3}{12}$$

である。$x^2 \cos x$ については、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \mathrm{d}x \quad (x^2 \cos x \text{ は偶関数なので})$$

である。まず、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \mathrm{d}x$ を計算する。

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \mathrm{d}x &= \left[x^2 \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

となる。ここで $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \mathrm{d}x$ を計算する。

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \mathrm{d}x &= \left[x\frac{\cos x}{-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-1} \mathrm{d}x \\
&= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

である。よって、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \mathrm{d}x$ の続きの計算をすると、

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \mathrm{d}x &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \cdot 1 \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2
\end{aligned}
$$

となる。よって、$\frac{\partial J}{\partial a}$ は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\pi^5}{80}a + \frac{\pi^3}{12}c - 2(\frac{\pi^2}{4} - 2) \\
&= \frac{\pi^5}{80}a + \frac{\pi^3}{12}c - \frac{\pi^2}{2} + 4
\end{aligned}
$$

となる。次に、b での偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial b}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\{ax^2+bx+c-\cos x\}x\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}x\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^3+bx^2+cx-x\cos x\}\mathrm{d}x \\
&= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\mathrm{d}x+b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x+c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x \\
&= 2b\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x \quad (x^3, x, x\cos x\,\text{は奇関数、}x^2\text{は偶関数なので}) \\
&= 2b\cdot\frac{\pi^3}{24} \\
&= \frac{\pi^3}{12}b
\end{aligned}
$$

である。次に、c での偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c}\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial c}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial c}\{ax^2+bx+c-\cos x\}^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\{ax^2+bx+c-\cos x\}\cdot 1\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2+bx+c-\cos x\}\mathrm{d}x \\
&= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x+b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x+c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\ \mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x \\
&= 2a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x+\pi c-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x \\
&= 2a\cdot\frac{\pi^3}{24}+\pi c-2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^3}{12}a+\pi c-2
\end{aligned}
$$

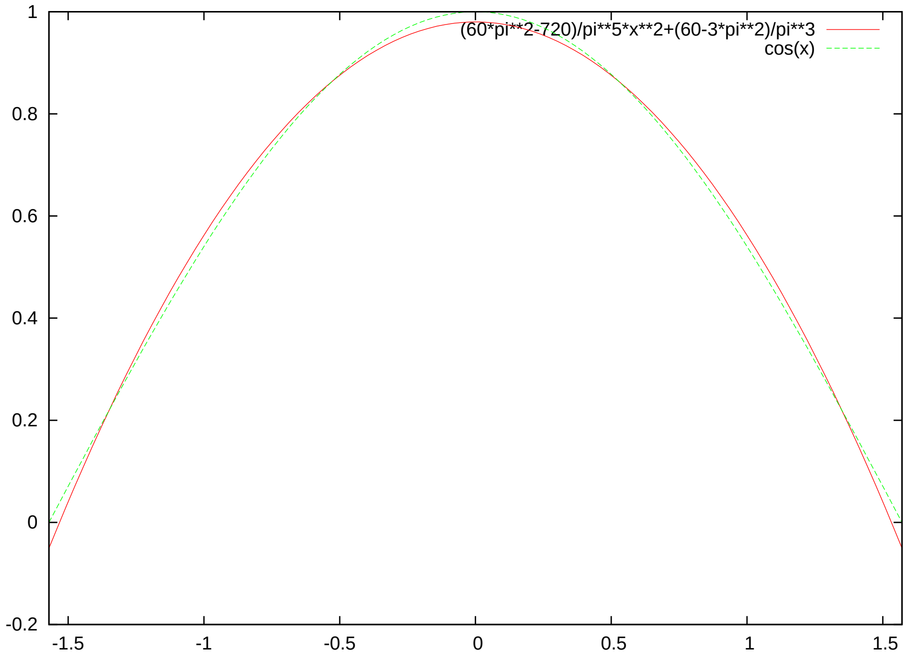

図 1: 区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上で関数 $\cos x$ に最も近い 2 次関数

である。これらを 0 とおくと、以下のような a, b, c に関する連立一次方程式が得られる。

$$\frac{\pi^5}{80}a + \frac{\pi^3}{12}c - \frac{\pi^2}{2} + 4 = 0$$
$$\frac{\pi^3}{12}b = 0$$
$$\frac{\pi^3}{12}a + \pi c - 2 = 0$$

となる。これを解くと、

$$a = \frac{60\pi^2 - 720}{\pi^5}, \quad b = 0, \quad c = \frac{60 - 3\pi^2}{\pi^3}$$

となる。以上より、求める 2 次関数は

$$f(x) = \frac{60\pi^2 - 720}{\pi^5}x^2 + \frac{60 - 3\pi^2}{\pi^3}$$

である。これを関数 $\cos x$ とともに区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ において図示すると、図 1 のようになる。図 1 において、赤色の曲線が求めた 2 次関数であり、緑色の曲線が関数 $\cos x$ である。