

## 練習問題 14-1

情報工学科 篠埜 功

練習問題 以下の関数  $f(x)$  のフーリエ変換を計算せよ。

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここでは、フーリエ変換、フーリエ逆変換は以下の定義を用いる<sup>1</sup>。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

これらは変換の定義であり、等式ではない。 $f(x)$  は  $f(x)$  のフーリエ変換の逆フーリエ変換とは必ずしも等しくない。

---

<sup>1</sup>定義中の定数は教科書によって異なる。

## 解答例

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_0^L xe^{-i\omega x} dx \\ &= \left[ x \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_0^L - \int_0^L \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} dx \\ &= \frac{Le^{-i\omega L}}{-i\omega} - \left[ \frac{e^{-i\omega x}}{-\omega^2} \right]_0^L \\ &= \frac{Le^{-i\omega L}}{-i\omega} + \left[ \frac{e^{-i\omega x}}{\omega^2} \right]_0^L \\ &= i \frac{Le^{-i\omega L}}{\omega} + \frac{e^{-i\omega L} - 1}{\omega^2} \\ &= i \frac{\omega Le^{-i\omega L}}{\omega^2} + \frac{e^{-i\omega L} - 1}{\omega^2} \\ &= \frac{i\omega Le^{-i\omega L} + e^{-i\omega L} - 1}{\omega^2} \\ &= \frac{e^{-i\omega L}(1 + i\omega L) - 1}{\omega^2} \\ &= \frac{e^{-iL\omega}(1 + iL\omega) - 1}{\omega^2} \end{aligned}$$

補足 関数  $F(\omega)$  のフーリエ逆変換は以下のように得られる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iL\omega}(1 + iL\omega) - 1}{\omega^2} e^{i\omega x} d\omega = \begin{cases} x & 0 < x < L \\ L/2 & x = L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このフーリエ逆変換は上記の積分を計算して得たのではなく、 $f(x)$  から得たものである。一般に、フーリエ級数と同様、以下の等式が成り立つ。

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$