練習問題13-1

情報工学科　篠埜 功

練習問題　区間 $[-\pi, \pi]$ における関数 $f(x) = x$ のフーリエ級数は

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{k}(-1)^k \sin kx \tag{1}$$

である。これを複素指数関数 $\{e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}\}$ の線形結合の形に変換せよ。

解答例 1

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2}$$

より、以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= e^{i(-\theta)} \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned} \tag{3}$$

等式 (2) と (3) を加えると

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

が得られる。等式 (2) から (3) を引くと

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

が得られる。従って以下の 2 つの等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned} \tag{4}$$

等式 (4) において θ に kx を代入すると

$$\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

が得られる。これを式 (1) に代入すると

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{k}(-1)^k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

が得られる。この式を以下のように書き換えて整理する。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{k}(-1)^k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} &= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k}(-1)^k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{i} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k}(-1)^k (-i)(e^{ikx} - e^{-ikx}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-1)^k i(e^{ikx} - e^{-ikx}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k}(-1)^k ie^{ikx} - \frac{1}{k}(-1)^k ie^{-ikx} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k}(-1)^k ie^{ikx} - \frac{1}{k}(-1)^k ie^{i(-k)x} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k}(-1)^k ie^{ikx} + \frac{1}{-k}(-1)^k ie^{i(-k)x} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k}(-1)^k ie^{ikx} + \frac{1}{-k}(-1)^{-k} ie^{i(-k)x} \right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}
\end{aligned}$$

ここで c_k は以下のように定義される。

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{k}(-1)^k i & k > 0 \\ 0 & k = 0 \\ \frac{1}{k}(-1)^k i & k < 0 \end{cases}$$

補足 $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ の表記は以下のように定義される。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

解答例 2

　複素指数関数による級数を直接得る解法を示す。仮に、

$$f(x) = \sum_{l=-n}^{n} c_l e^{ilx}$$

とおく。（この等式を満たす $c_{-n}, \ldots, c_0, \ldots, c_n$ は存在しないが、仮に上記の等式が成り立つとする。）この等式の両辺に e^{-ikx} をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分する。

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \sum_{l=-n}^{n} c_l e^{ilx} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=-n}^{n} c_l e^{ilx} e^{-ikx} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=-n}^{n} c_l e^{i(l-k)x} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{l=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} c_l e^{i(l-k)x} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{0} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} c_k \mathrm{d}x \\
&= 2\pi c_k
\end{aligned}$$

従って c_k は以下のように得られる。

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

$k \neq 0$ のとき、c_k は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[x\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi e^{-ik\pi} - (-\pi)e^{ik\pi}}{-ik} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi(-1)^k + \pi(-1)^k}{-ik} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi(-1)^k}{-ik} \\
&= \frac{(-1)^k}{-ik} \\
&= \frac{1}{k}(-1)^k i
\end{aligned}$$

$k = 0$ のとき、c_0 は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{0}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

従って関数 $f(x)$ に最も近い線形結合は

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

である。ここで c_k は以下のように定義される。

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{k}(-1)^k i & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

関数 $f(x)$ のフーリエ級数は上記で得られた線形結合において n を大きくしたときの極限であり、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

である。これは解答例 1 で得られた級数と同じである。

補足　以下で、得られた級数を元の級数 (1) に戻してみる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx} + \sum_{k=-1}^{-n} c_k e^{ikx}\right\} + c_0 e^0 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} c_{-k} e^{i(-k)x}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{i(-k)x}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}(-1)^k i e^{ikx} + \frac{1}{-k}(-1)^{-k} i e^{i(-k)x}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(-1)^k i(\cos kx + i\sin kx)\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{k}(-1)^k i(\cos kx - i\sin kx)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(-1)^k i\cos kx - \frac{1}{k}(-1)^k \sin kx\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{k}(-1)^k i\cos kx - \frac{1}{k}(-1)^k \sin kx\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{k}(-1)^k \sin kx
\end{aligned}
$$

これは級数 (1) である。

補足　解答例 2 では、等式の両辺に e^{-ikx} を掛けたが、e^{ikx} を掛けてもよい。同じ結果が得られる。ただし、e^{ikx} を掛けた場合、

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\mathrm{d}x$$

が得られ、ここから

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{i(-k)x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

のように符号を変えると同じ式が得られる。e^{-ikx} を両辺に掛けることにより、最後の符号の変換をしなくていいようにしている。このあとは $f(x)=x$ として解答例 2 と同じ計算をすればよい。