練習問題12

情報工学科　篠埜 功

練習問題　区間 $[-1,1]$ 上の実数値連続関数の集合を考える。練習問題 9-2 と同様にして、和、スカラー倍、内積を以下のように導入し、計量空間を構築する。

$$
\begin{array}{rcl}
(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(x) & = & f(x)+g(x) \\
(c\boldsymbol{f})(x) & = & c(f(x)) \\
(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) & = & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x
\end{array}
$$

この計量空間において、区間 $-1 \leq x \leq 1$ 上の 4 つの連続関数 $u_1(x)=1,\ u_2(x)=x,\ u_3(x)=x^2, u_4(x)=x^3$ にシュミットの直交化を施せ。

解答例　まず、$e_1=u_1$, つまり $e_1(x)=1$ とする。

次に、$e_2=u_2-c_1e_1$ とおき、これが e_1 と直交するように c_1 を定める。e_1 と e_2 の内積は

$$
\begin{array}{rcl}
(e_1,e_2) & = & (e_1,u_2-c_1e_1) \\
 & = & (e_1,u_2)-c_1(e_1,e_1)
\end{array}
$$

であり、これを 0 とおくと、

$$
\begin{array}{rcl}
c_1 & = & \dfrac{(e_1,u_2)}{(e_1,e_1)} \\
 & = & \dfrac{(1,x)}{(1,1)} \\
 & = & \dfrac{\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x} \\
 & = & 0
\end{array}
$$

となる。よって、

$$e_2(x)=x$$

である。

次に、$e_3 = u_3 - (c_1 e_1 + c_2 e_2)$ とおき、これが e_1, e_2 と直交するように c_1, c_2 を定める。e_1 と e_3 の内積は

$$\begin{aligned}(e_1, e_3) &= (e_1, u_3 - (c_1 e_1 + c_2 e_2)) \\ &= (e_1, u_3) - c_1 (e_1, e_1)\end{aligned}$$

であり、これを 0 とおくと、

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{(e_1, u_3)}{(e_1, e_1)} \\ &= \frac{(1, x^2)}{(1, 1)} \\ &= \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}x} \\ &= \frac{2/3}{2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。e_2 と e_3 の内積は

$$\begin{aligned}(e_2, e_3) &= (e_2, u_3 - (c_1 e_1 + c_2 e_2)) \\ &= (e_2, u_3) - c_2 (e_2, e_2)\end{aligned}$$

であり、これを 0 とおくと、

$$\begin{aligned}c_2 &= \frac{(e_2, u_3)}{(e_2, e_2)} \\ &= \frac{(x, x^2)}{(x, x)} \\ &= \frac{\int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって

$$e_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

である。

次に、$e_4 = u_4 - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)$ とおき、これが e_1, e_2, e_3 と直交するように c_1, c_2, c_3 を定める。e_1 と e_4 の内積は

$$\begin{aligned}(e_1, e_4) &= (e_1, u_4 - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)) \\ &= (e_1, u_4) - c_1 (e_1, e_1)\end{aligned}$$

であり、これを 0 とおくと、

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{(e_1, u_4)}{(e_1, e_1)} \\
&= \frac{(1, x^3)}{(1, 1)} \\
&= \frac{\int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。e_2 と e_4 の内積は

$$
\begin{aligned}
(e_2, e_4) &= (e_2, u_4 - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)) \\
&= (e_2, u_4) - c_2(e_2, e_2)
\end{aligned}
$$

であり、これを 0 とおくと、

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \frac{(e_2, u_4)}{(e_2, e_2)} \\
&= \frac{(x, x^3)}{(x, x)} \\
&= \frac{\int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x} \\
&= \frac{2/5}{2/3} \\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

となる。e_3 と e_4 の内積は

$$
\begin{aligned}
(e_3, e_4) &= (e_3, u_4 - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)) \\
&= (e_3, u_4) - c_3(e_3, e_3)
\end{aligned}
$$

であり、これを 0 とおくと、

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \frac{(e_3, u_4)}{(e_3, e_3)} \\
&= \frac{(x^2 - \frac{1}{3}, x^3)}{(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3})} \\
&= \frac{\int_{-1}^{1} x^5 - \frac{1}{3}x^3 \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} \mathrm{d}x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。よって

$$e_4(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

以上より、$1, x, x^2, x^3$ にシュミットの直交化を施して得られた直交系は

$$1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3},\ x^3 - \frac{3}{5}x$$

である。

補足 1　この解答では正規化はしていないが、してもよい。

補足 2　得られたベクトル（関数）はルジャンドル多項式 (Legendre polynomials) と以下の関係がある。

$$P_i(x) = \frac{e_{i+1}(x)}{e_{i+1}(1)} \quad (i \geq 0)$$

$i = 0, 1, 2, 3$ の場合について以下で確認する。

$$\begin{aligned}\frac{e_1(x)}{e_1(1)} &= \frac{1}{1}\\ &= 1\\ &= P_0(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{e_2(x)}{e_2(1)} &= \frac{x}{1}\\ &= x\\ &= P_1(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{e_3(x)}{e_3(1)} &= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\\ &= (x^2 - \frac{1}{3}) \cdot \frac{3}{2}\\ &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\\ &= P_2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{e_4(x)}{e_4(1)} &= \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{1 - \frac{3}{5}}\\ &= \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\frac{2}{5}}\\ &= (x^3 - \frac{3}{5}x) \cdot \frac{5}{2}\\ &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\\ &= P_3(x)\end{aligned}$$