練習問題10-2

情報工学科　篠埜 功

練習問題　区間 $[-\pi, \pi]$ 上の実数値連続関数の集合を考える。練習問題 9-2 と同様にして、和、スカラー倍、内積を以下のように導入し、計量空間を構築する。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(x) &= f(x)+g(x) \\
(c\boldsymbol{f})(x) &= c(f(x)) \\
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

この計量空間において、関数 $f(x)=x^2$ を $e_1(x)=\frac{1}{2}$, $e_2(x)=\cos x$, $e_3(x)=\sin x$ の線形結合（$\sum_{k=1}^{3} c_k e_k(x) = c_1e_1(x)+c_2e_2(x)+c_3e_3(x)$ の形の関数）で近似せよ。つまり、$c_1e_1(x)+c_2e_2(x)+c_3e_3(x)$ が $f(x)$ に最も近くなるような c_1, c_2, c_3 を求めよ。近さの尺度としては、 以下の式で表される、$c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_3$ と $\boldsymbol{f}$ の差のノルムの 2 乗（の半分）を用いよ。

$$J = \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{3} c_k\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{f}\right\|^2$$

ノルムは以下のように定義される。

$$\|\boldsymbol{f}\| = \sqrt{(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f})} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\mathrm{d}x}$$

以下で回答例を 3 つ示す。1 つ目の回答では、$i=1,2,3$ について $\frac{\partial J}{\partial c_i}=0$ を解く。2 つ目の回答では特別な場合を考えて解く。3 つ目の回答では、$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ で張られる部分空間への $\boldsymbol{f}$ の射影を計算して解く。

解答例 1　まず以下のように J を計算する。

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{3} c_k\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{f}\right\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{3} c_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{f}, \sum_{k=1}^{3} c_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{f}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{3} c_k \boldsymbol{e}_k, \sum_{k=1}^{3} c_k \boldsymbol{e}_k\right) - 2\left(\boldsymbol{f}, \sum_{k=1}^{3} c_k \boldsymbol{e}_k\right) + \|\boldsymbol{f}\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{3} c_k c_l (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) - 2\sum_{k=1}^{3} c_k (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_k) + \|\boldsymbol{f}\|^2\right\}
\end{aligned}
$$

これを $c_i (i = 1, 2, 3)$ について偏微分する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c_i} &= \frac{\partial}{\partial c_i}\frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{3} c_k c_l (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) - 2\sum_{k=1}^{3} c_k (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_k) + \|\boldsymbol{f}\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{k,l=1}^{3} c_k c_l (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) - 2\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{k=1}^{3} c_k (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_k)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{2\sum_{k=1}^{3} c_k (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i) - 2(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_i)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{3} c_k (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_i)
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\partial J}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ を行列の形式で書くと以下のようになる。

$$
\begin{pmatrix}
(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) \\
(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) \\
(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_2) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}
$$

ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ はお互いに直交しているので、

$$
\begin{pmatrix}
\|\boldsymbol{e}_1\|^2 & 0 & 0 \\
0 & \|\boldsymbol{e}_2\|^2 & 0 \\
0 & 0 & \|\boldsymbol{e}_3\|^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_2) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}
$$

となり、$c_i = \dfrac{(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_i)}{\|\boldsymbol{e}_i\|^2} \quad (i = 1, 2, 3)$ を得る。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} \\
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_2) &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x \mathrm{d}x \\
&= \left[x^2 \sin x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin x \mathrm{d}x \\
&= -2\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\left\{\left[x\frac{\cos x}{-1}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x}{-1}\mathrm{d}x\right\} \\
&= 2\left[x\cos x\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 2\Big\{\pi\cos\pi - (-\pi)\cos(-\pi)\Big\} \\
&= 2\{2\pi\cos\pi\} \\
&= 4\pi\cos\pi \\
&= -4\pi \\
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_3) &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin x\mathrm{d}x = 0 \\
(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} \\
(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x = \pi
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\frac{\pi^3}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi^2 \\
c_2 &= \frac{-4\pi}{\pi} = -4 \\
c_3 &= 0
\end{aligned}
$$

を得る。よって $\boldsymbol{f}$ に最も近い $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の線形結合は

$$
\frac{2}{3}\pi^2\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2
$$

となる。このベクトルは以下の関数を表している。

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}\pi^2\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2\right)(x) &= \frac{2}{3}\pi^2 e_1(x) - 4e_2(x) \\
&= \frac{1}{3}\pi^2 - 4\cos x
\end{aligned}
$$

これは、関数 $f(x)$ のフーリエ級数における、$\cos x$, $\sin x$ の項までの関数である。

解答例 2　以下の等式が成り立つと仮定する。

$$
f = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3
$$

（この等式を満たす c_1, c_2, c_3 は存在しないが、仮に上記の等式が成り立つ場合を考える。）上記の等式の両辺とベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ との内積をとる。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1) = c_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + c_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + c_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) \\
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_2) = c_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + c_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + c_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) \\
(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_3) = c_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) + c_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + c_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)
\end{aligned}
$$

これらの 3 つの等式を行列の形式で書くと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) \\ (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_2) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}$$

これは回答例 1 で得られた等式と同じである。残りの計算は省略する。

解答例 3

$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ で張られる部分空間へのベクトル $\boldsymbol{f}$ の射影が $\boldsymbol{f}$ に最も近い線形結合である。つまり、ベクトル $\boldsymbol{u} - (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3)$ が $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ で張られる部分空間と直交するときに $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の線形結合が $\boldsymbol{f}$ に最も近い。よって次の 2 つの等式を満たす c_1, c_2, c_3 を求めればよい。

$$\begin{aligned} (f - (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{e}_1) = 0 \\ (f - (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{e}_2) = 0 \\ (f - (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{e}_3) = 0 \end{aligned}$$

上記の各等式の左辺の内積を内積の公理で展開すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1) - (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = 0 \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_2) - (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) = 0 \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_3) - (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 0 \end{aligned}$$

2 つ目の内積を右辺に移項すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1) = (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_2) = (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_3) = (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) \end{aligned}$$

右辺の内積を内積の公理で展開すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1) = c_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + c_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + c_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_2) = c_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + c_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + c_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_3) = c_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) + c_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + c_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) \end{aligned}$$

これらを行列の形式で書くと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) \\ (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_2) \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}$$

これは回答例 1, 2 で得られた等式と同じである。残りの計算は省略する。