

中間試験解答例

情報工学科 篠埜 功

2018年6月4日

問1(10点) 3点 $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,4)$ に最も近い1次関数を求めよ。近さの尺度としては、 y 座標の差の2乗の和の半分を用いよ。

解答例 求める関数を $f(x) = ax + b$ 、与えられた3点を $(x_1, y_1) = (0,0)$, $(x_2, y_2) = (1,1)$, $(x_3, y_3) = (3,4)$ とおく。関数 $f(x)$ と3点の y 座標の差の2乗和の半分

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (f(x_i) - y_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)^2$$

を最小にするような a, b を求めればよい。 J を最小にするには、 J の a, b での偏微分が0になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \frac{\partial J}{\partial b} = 0$$

を解けばよい。まず、 a での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial a} (ax_i + b - y_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 2(ax_i + b - y_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^3 (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) \\ &= a \sum_{i=1}^3 x_i^2 + b \sum_{i=1}^3 x_i - \sum_{i=1}^3 x_i y_i \end{aligned}$$

である。次に、 b での偏微分は、

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)^2 \right\}$$

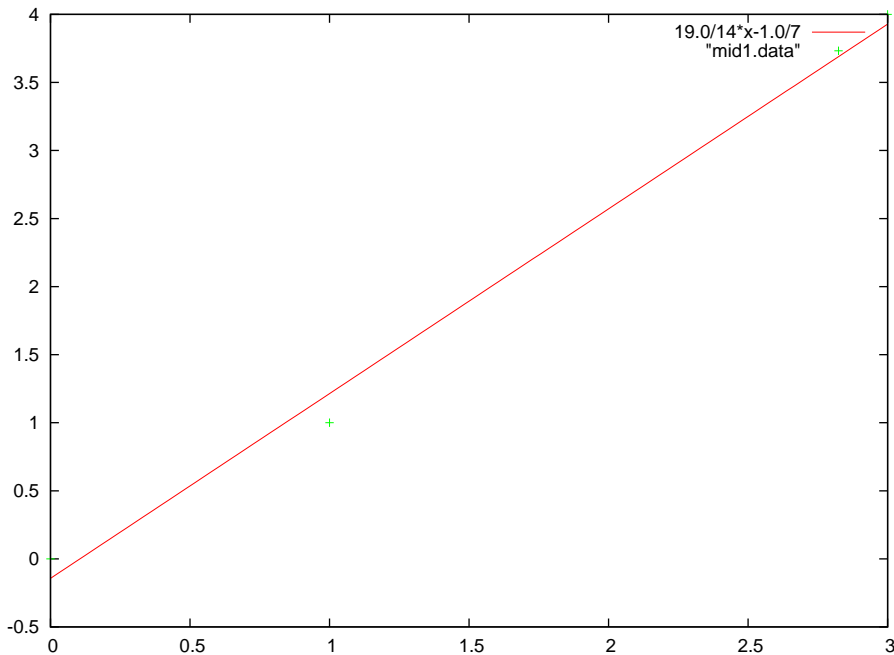


図 1: $f(x) = \frac{19}{14}x - \frac{1}{7}$ と与えられた 3 点の比較

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial b} (ax_i + b - y_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 2(ax_i + b - y_i) \\
 &= \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i) \\
 &= a \sum_{i=1}^3 x_i + b \sum_{i=1}^3 1 - \sum_{i=1}^3 y_i
 \end{aligned}$$

である。これらを 0 とおくと、

$$10a + 4b - 13 = 0$$

$$4a + 3b - 5 = 0$$

が得られ、これを解くと、 $a = \frac{19}{14}, b = -\frac{1}{7}$ となる。よって求める関数は、

$$f(x) = \frac{19}{14}x - \frac{1}{7}$$

である。

補足 これを 3 点とともに図示すると図 1 のようになる。図 1 において、緑色の + 記号が与えられた点であり、赤色の直線が上記の 1 次関数 $f(x)$ である。

問 2 (10 点) 4 点 $(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 1)$ に最も近い 2 次関数を求めよ。近さの尺度としては、 y 座標の差の 2 乗の和の半分を用いよ。

解答例 練習問題 2 と同じです。

問 3 (10 点) 列ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ を列ベクトル $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

の線形結合 ($\sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2$ の形) で近似せよ。つまり、 $c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2$ が \mathbf{a} に最も近くなるような c_1, c_2 を求めよ。近さの尺度は差のノルムの 2 乗の半分、

つまり $J = \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k - \mathbf{a} \right\|^2$ とせよ。ノルムの定義は、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のとき、

$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^3 x_k^2}$ である。また、以下の正規方程式 (normal equation) を使って良いものとする。

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) & (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) & (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{u}_1) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{u}_2) \end{pmatrix}$$

解答例 練習問題 4 と同じです。

問 4 (10 点)

関数 $\sin x$ に区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で最も近い 1 次関数を求めよ。近さの尺度としては、 y 座標の差の 2 乗の区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ における積分 (の半分) を用いよ。つまり、求める 1 次関数を $f(x) = ax + b$ としたとき、近さの尺度 J は

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - \sin x\}^2 dx$$

とせよ。

解答例 例題 3 と同じです。