

フーリエ変換について

情報工学科 篠埜 功

この文書の内容は（少し変えている箇所はあるが）ほぼ [1] に基づいている。

1 フーリエ積分

周期 $2L$ の周期関数 $f_L(x)$ （ただし $L > 1$ ）が以下のフーリエ級数に展開されているとする。

$$f_L(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x)$$

ここで a_0, a_k, b_k, ω_k は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{k\pi}{L} \\ a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(x) \cos \omega_k x dx \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(x) \sin \omega_k x dx\end{aligned}$$

これらを代入すると $f_L(x)$ は以下のように表される。

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(x) dx + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \cos \omega_k x \int_{-L}^L f_L(x) \cos \omega_k x dx + \sin \omega_k x \int_{-L}^L f_L(x) \sin \omega_k x dx \right\}$$

ここで

$$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{(k+1)\pi}{L} - \frac{k\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

とする。すると $1/L = \Delta\omega/\pi$ であるので、上記等式は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} f_L(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(x) dx + \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \cos \omega_k x \int_{-L}^L f_L(x) \cos \omega_k x dx \right. \\ &\quad \left. + \sin \omega_k x \int_{-L}^L f_L(x) \sin \omega_k x dx \right\} \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \cos \omega_k x \int_{-L}^L f_L(x) \cos \omega_k x dx \right. \\ &\quad \left. + \sin \omega_k x \int_{-L}^L f_L(x) \sin \omega_k x dx \right\} \Delta\omega \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \cos k\Delta\omega x \int_{-L}^L f_L(x) \cos k\Delta\omega x dx \right. \\ &\quad \left. + \sin k\Delta\omega x \int_{-L}^L f_L(x) \sin k\Delta\omega x dx \right\} \Delta\omega \end{aligned}$$

この両辺において L を大きくしたときの極限を考える。左辺の関数 $f_L(x)$ の L を大きくしたときの極限 $\lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x)$ を $f(x)$ とおく。

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x)$$

この関数 $f(x)$ が x 軸上で絶対可積分であると仮定する。つまり、以下の極限が存在すると仮定する。

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |f(x)| dx + \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a |f(x)| dx$$

(この式は通常 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ と書く。)

右辺については、最初の項 $\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(x) dx$ は $L \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。2番目の項 $\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \{ \dots \} \Delta\omega$ は、 $L \rightarrow \infty$ のとき、区分求積法による積分の計算と似たような状況になっているので、以下の積分になりそうな感じがする^{1 2}。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx + \sin \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx \right\} d\omega$$

¹感じがするだけで、(少なくともこの資料の説明では) 論理的に繋がっていない。数学的には、通常フーリエ級数とフーリエ変換は別々に議論する。ただし、実際にはフーリエ級数とフーリエ変換は密接な関係があり、通常工学部の授業で使う教科書等においては、フーリエ級数の周期を無限にしたものがフーリエ変換という説明がなされる。

²同じ名前 x を複数の異なるスコープの変数を表すために用いている。もちろん、内側の x を v などのような別の変数に名前を変えることも可能であり、その方が普通の書き方もかもしれない。

以上より、

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx + \sin \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx \right\} d\omega$$

が成り立ちそうな感じである（正式には以下の定理 1 を参照）。関数

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \quad (1)$$

と

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx \quad (2)$$

を導入すると上記の式は以下のように書きあらわされる。

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x\} d\omega \quad (3)$$

これを関数 $f(x)$ のフーリエ積分（Fourier integral）による表現という³。

以下の定理が成り立つ（参考文献 [1, p. 513] 参照）。この資料では証明はしない。

定理 1 関数 $f(x)$ がすべての有限区間において区分的に連続であり、すべての点で左右の導関数を持ち、 $f(x)$ が絶対可積分であるならば、 $f(x)$ は関数 A と B を (1) と (2) で与えたとき、(3) で表される。 $f(x)$ が連続でない点においてはフーリエ積分の値は $f(x)$ の左右の極限の平均値となる。式で表すと以下のようなになる。

$$\int_0^{\infty} \{A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x\} d\omega = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

□

例題 以下の関数 $f(x)$ のフーリエ積分を計算せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

解答例 まず $A(\omega)$ と $B(\omega)$ を以下のように計算する。

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos \omega x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \omega x}{\omega} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \end{aligned}$$

³フーリエ級数のときと同様、これは等式ではなく、変換を書いたものと捉えるべきである。厳密にはこの等式がいつも成立するわけではない。正式には定理 1 を参照。

$$\begin{aligned}
B(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin \omega x dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

従って $f(x)$ のフーリエ積分は以下ようになる。

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x \sin \omega}{\omega} d\omega$$

定理 1 により以下の等式を得る。

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x \sin \omega}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 1/2 & x = -1, 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

上記積分は、以下の積分の極限 ($a \rightarrow \infty$ のとき) である。

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos \omega x \sin \omega}{\omega} d\omega$$

この積分は $x = -1, x = 1$ の付近で振動する。この振動は a が大きくなっても消えない。これをフーリエ級数の場合と同様、ギブス現象 (Gibbs phenomenon) と呼ぶ。

補足 $f(x)$ のフーリエ積分において $x = 0$ を代入すると

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = 1$$

を得る。 $\frac{\pi}{2}$ を両辺にかけると

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

となる。これは Dirichlet integral と呼ばれる。これは、以下の関数の極限 ($a \rightarrow \infty$ のとき) であり、sine integral と呼ばれる。

$$\text{Si}(a) = \int_0^a \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega$$

$\text{Si}(a)$ には振動があり、上記積分の振動はこの関数 $\text{Si}(a)$ の振動からきている。

2 フーリエ変換 (Fourier transform)

前節で述べた通り、 $f(x)$ のフーリエ積分は

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x\} d\omega$$

であり、 A と B は以下のように与えられる。

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos \omega v dv$$
$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin \omega v dv$$

これらを上記の等式に代入すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos \omega v dv \cos \omega x + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin \omega v dv \sin \omega x \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos \omega v dv \cos \omega x + \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin \omega v dv \sin \omega x \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos \omega v \cos \omega x dv + \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin \omega v \sin \omega x dv \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) (\cos \omega v \cos \omega x + \sin \omega v \sin \omega x) dv \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(\omega x - \omega v) dv \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(\omega(x - v)) dv \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(\omega(x - v)) dv \right\} d\omega \\ &\quad (\text{括弧 } \{ \} \text{ の中は } \omega \text{ に関する偶関数なので}) \end{aligned}$$

得られた式の中の \cos を \sin に変えた式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(\omega(x - v)) dv \right\} d\omega$$

の値は、括弧 $\{ \}$ の中が ω に関する奇関数なので、0 である。

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

の x を $\omega(x - v)$ に置き換えると以下の等式が得られる。

$$e^{i\omega(x-v)} = \cos(\omega(x - v)) + i \sin(\omega(x - v))$$

この等式の両辺に $f(v)$ をかけると以下の等式を得る。

$$f(v)e^{i\omega(x-v)} = f(v) \cos(\omega(x-v)) + if(v) \sin(\omega(x-v))$$

両辺を v と ω に関して積分し、 $\frac{1}{2\pi}$ をかけると以下のようにになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega(x-v)} dv \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(\omega(x-v)) + if(v) \sin(\omega(x-v)) dv \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(\omega(x-v)) dv \right\} d\omega \\ &\quad + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(\omega(x-v)) dv \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(\omega(x-v)) dv \right\} d\omega \\ &= f(x) \end{aligned}$$

よって以下の等式を得る。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega(x-v)} dv \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega x - i\omega v} dv \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega x} e^{-i\omega v} dv \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-i\omega v} dv \right\} e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

通常これを以下のように書く⁴。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$ を $f(x)$ のフーリエ変換、 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega$ を $F(\omega)$ の逆フーリエ変換と呼ぶ。

注意 上記2つの式は変換の定義であり、等式ではない。 $f(x)$ は $f(x)$ のフーリエ変換の逆フーリエ変換とは必ずしも等しくない(定理1参照)。

⁴定数 ($\frac{1}{2\pi}$ と 1) は教科書により異なる。定数は例えば $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ と $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ でもよい

例題 以下の関数のフーリエ変換を計算せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

解答例

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx \\ &= \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) \\ &= \frac{1}{-i\omega} (\cos \omega - i \sin \omega - (\cos \omega + i \sin \omega)) \\ &= \frac{1}{-i\omega} (-2i \sin \omega) \\ &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons Ltd., tenth edition, 2011.