

例題 14

情報工学科 篠埜 功

例題 以下のように定義される周期 $2L$ (ただし $L > 1$) の矩形関数 $f_L(x)$ を考える。

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & -L < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < L \end{cases}$$

関数 $f_L(x)$ の区間 $[-L, L]$ における

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x\}$$

の形のフーリエ級数を求めよ。ここで ω_k は $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$ と定義される。

解答例 仮に

$$f_L(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x\}$$

とおく。(この等式を満たす a_0, \dots, a_n は存在しないが、仮にこの等式が成り立つとする。)

まず、両辺を区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f_L(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2}a_0 dx \\ &= La_0 \end{aligned}$$

従って a_0 は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(x) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-1}^1 1 dx \\ &= \frac{1}{L} \cdot 2 \\ &= \frac{2}{L} \end{aligned}$$

次に、両辺に $\cos \omega_k x$ をかけて区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L f_L(x) \cos \omega_k x dx &= \int_{-L}^L a_k \cos^2 \omega_k x dx \\ &= L a_k\end{aligned}$$

従って a_k は以下のように得られる。

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(x) \cos \omega_k x dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \cos \omega_k x dx \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{\sin \omega_k x}{\omega_k} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{L} \cdot \frac{\sin \omega_k - \sin(-\omega_k)}{\omega_k} \\ &= \frac{1}{L} \cdot \frac{\sin \omega_k + \sin \omega_k}{\omega_k} \\ &= \frac{1}{L} \cdot \frac{2 \sin \omega_k}{\omega_k} \\ &= \frac{2}{L} \cdot \frac{\sin \omega_k}{\omega_k}\end{aligned}$$

最後に、両辺に $\sin \omega_k x$ をかけて区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L f_L(x) \sin \omega_k x dx &= \int_{-L}^L b_k \sin^2 \omega_k x dx \\ &= L b_k\end{aligned}$$

従って b_k は以下のように得られる。

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(x) \sin \omega_k x dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \sin \omega_k x dx \\ &= 0\end{aligned}$$

以上より、関数 $f_L(x)$ に最も近い線形結合は

$$\frac{1}{L} + \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{L} \cdot \frac{\sin \omega_k}{\omega_k} \cos \omega_k x \right\}$$

である。関数 $f_L(x)$ のフーリエ級数は上記で得られた線形結合において n を大きくしたときの極限であり、

$$\frac{1}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{L} \cdot \frac{\sin \omega_k}{\omega_k} \cos \omega_k x \right\}$$

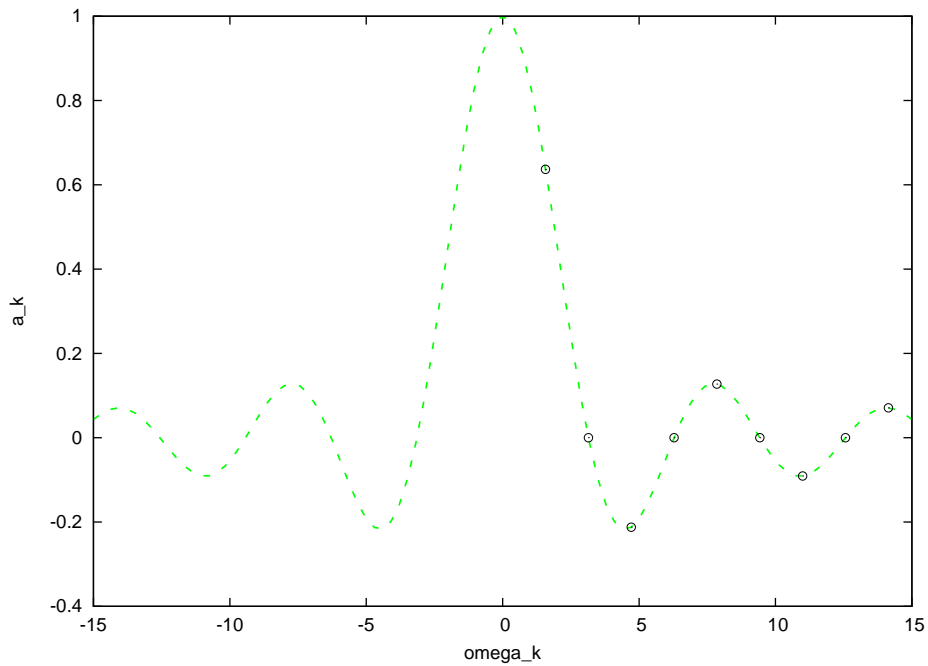


図 1: ω_k と a_k の関係 ($L = 2$ の場合)

である。

ω_k と a_k の関係を $L = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ の場合についてそれぞれ図 1, 2, 3, 4, 5, 6 に示す。

補足 関数 $f_L(x)$ の L が大きくなったときの極限は以下の関数である。

$$\lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この関数は非周期関数である。以上により、周期関数だけでなく、非周期関数も展開 (変換) できるのではないかと予想される。

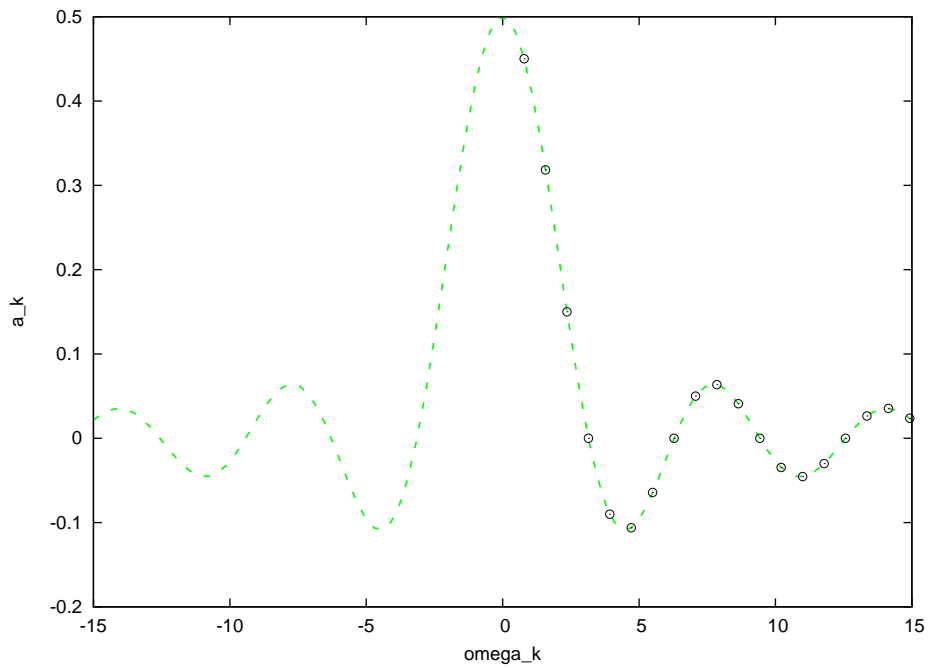


図 2: ω_k と a_k の関係 ($L = 4$ の場合)

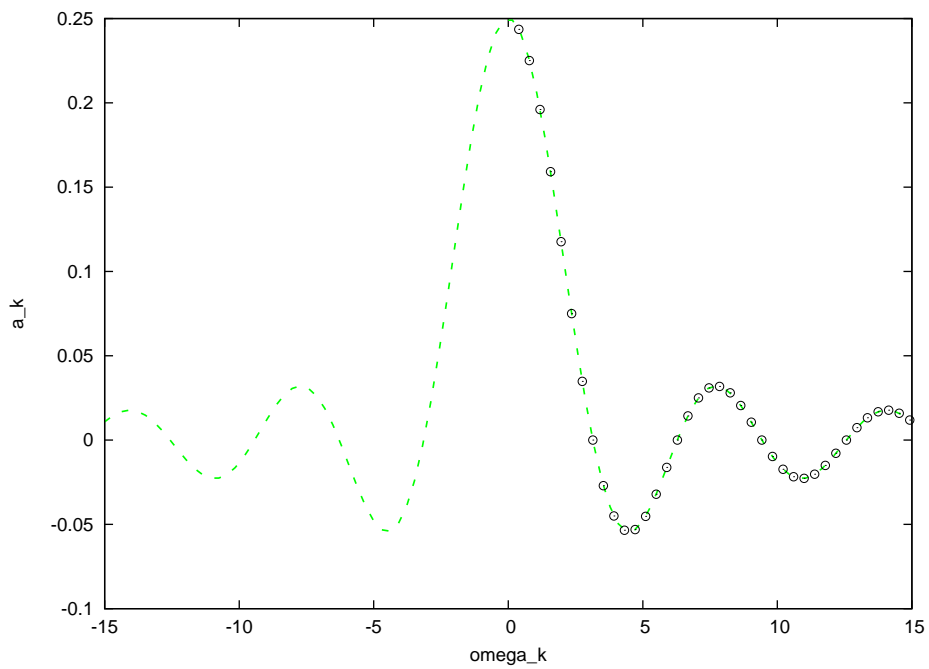


図 3: ω_k と a_k の関係 ($L = 8$ の場合)

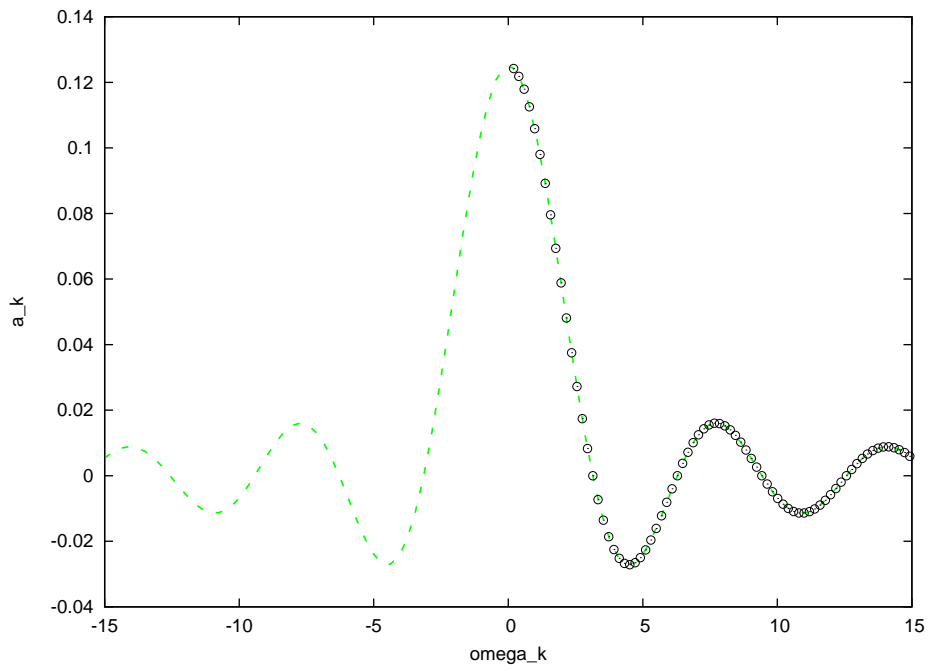


図 4: ω_k と a_k の関係 ($L = 16$ の場合)

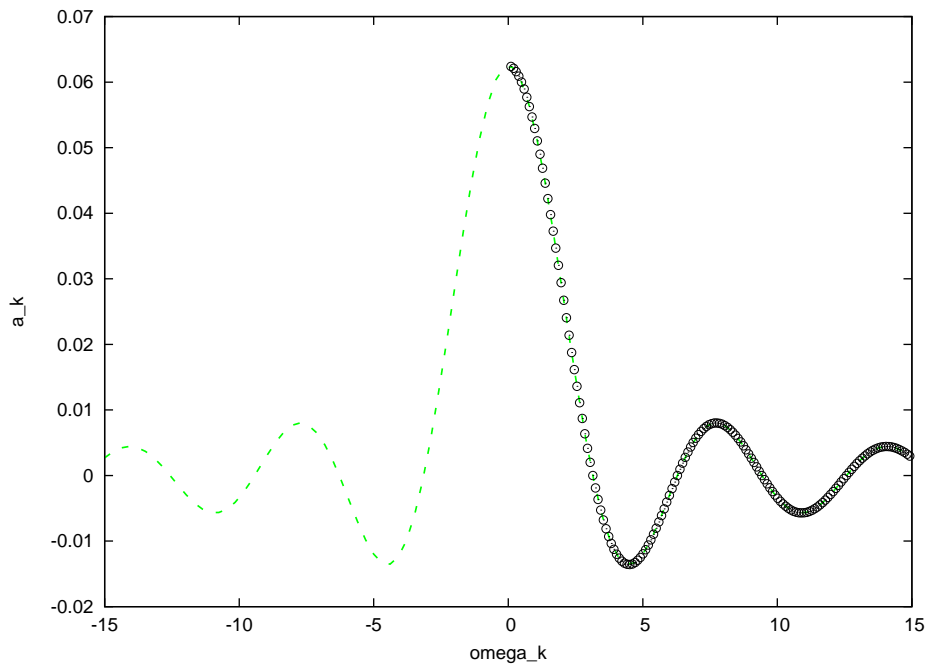


図 5: ω_k と a_k の関係 ($L = 32$ の場合)

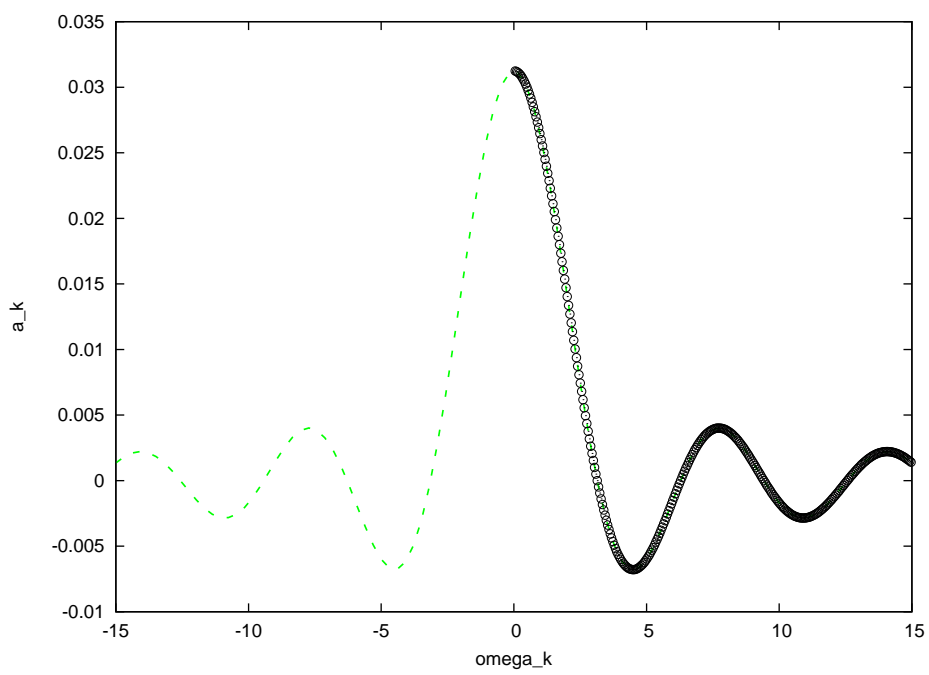


図 6: ω_k と a_k の関係 ($L = 64$ の場合)