フーリエ変換について

情報工学科　篠埜 功

この文書の内容は（少し変えている箇所はあるが）ほぼ [1] に基づいている。

1　フーリエ積分

周期 $2L$ の周期関数 $f_L(x)$（ただし $L > 1$）が以下のフーリエ級数に展開されているとする。

$$f_L(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\omega_k x + b_k \sin\omega_k x)$$

ここで a_0, a_k, b_k, ω_k は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \frac{k\pi}{L} \\
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\mathrm{d}x \\
a_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\cos\omega_k x\mathrm{d}x \\
b_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\sin\omega_k x\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

これらを代入すると $f_L(x)$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
f_L(x) &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\cos\omega_k x\int_{-L}^{L} f_L(x)\cos\omega_k x\mathrm{d}x\right. \\
&\qquad \left. + \sin\omega_k x\int_{-L}^{L} f_L(x)\sin\omega_k x\mathrm{d}x\right\}
\end{aligned}$$

ここで

$$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{(k+1)\pi}{L} - \frac{k\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

とする。すると $1/L = \Delta\omega/\pi$ であるので、上記等式は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} f_L(x) &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\mathrm{d}x + \frac{\Delta\omega}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\cos\omega_k x\int_{-L}^{L} f_L(x)\cos\omega_k x\mathrm{d}x \right. \\ &\qquad \left. + \sin\omega_k x\int_{-L}^{L} f_L(x)\sin\omega_k x\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\cos\omega_k x\int_{-L}^{L} f_L(x)\cos\omega_k x\mathrm{d}x \right. \\ &\qquad \left. + \sin\omega_k x\int_{-L}^{L} f_L(x)\sin\omega_k x\mathrm{d}x\right\}\Delta\omega \end{aligned}$$

この両辺において L を大きくしたときの極限を考える。左辺の関数 $f_L(x)$ の L を大きくしたときの極限 $\lim_{L\to\infty} f_L(x)$ を $f(x)$ とおく。

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x)$$

この関数 $f(x)$ が x 軸上で**絶対可積分**であると仮定する。つまり、以下の極限が存在すると仮定する。

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 |f(x)|\mathrm{d}x + \lim_{a\to\infty}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x$$

(この式は通常 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ と書く。)

右辺については、最初の項 $\displaystyle\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\mathrm{d}x$ は $L\to\infty$ のとき 0 に収束する。2 番目の項 $\displaystyle\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\{\ldots\}\Delta\omega$ は、$L\to\infty$ のとき、区分求積法により以下の積分に**収束しそうな感じが**する[1][2]。

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\cos\omega x\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\mathrm{d}x + \sin\omega x\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\omega$$

以上より、

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\cos\omega x\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\mathrm{d}x + \sin\omega x\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\omega$$

[1]感じがするだけで、収束に関して別途議論する必要がある。ただし、通常工学部の授業で使う教科書等においては、収束について特に議論せず、単にフーリエ級数の周期を無限にしたものがフーリエ変換というような説明をする。

[2]同じ名前 x を複数の異なるスコープの変数を表すために用いている。もちろん、内側の x を v などのような別の変数に名前を変えることも可能であり、その方が普通の書き方かもしれない。

が成り立ちそうな感じである（正式には以下の定理 1 を参照）。関数

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x \mathrm{d}x \tag{1}$$

と

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x \mathrm{d}x \tag{2}$$

を導入すると上記の式は以下のように書きあらわされる。

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \{A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\} \mathrm{d}\omega \tag{3}$$

これを関数 $f(x)$ の**フーリエ積分（Fourier integral）**による表現という[3]。

以下の定理が成り立つ（参考文献 [1, p. 513] 参照）。この資料では証明はしない。

定理 1 関数 $f(x)$ がすべての有限区間において区分的に連続であり、すべての点で左右の導関数を持ち、$f(x)$ が絶対可積分であるならば、$f(x)$ は関数 A と B を *(1)* と *(2)* で与えたとき、*(3)* で表される。$f(x)$ が連続でない点においてはフーリエ積分の値は $f(x)$ の左右の極限の平均値となる。式で表すと以下のようになる。

$$\int_{0}^{\infty} \{A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\} \mathrm{d}\omega = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

□

例題　以下の関数 $f(x)$ のフーリエ積分を計算せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

解答例　まず $A(\omega)$ と $B(\omega)$ を以下のように計算する。

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos\omega x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\omega x}{\omega}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2\sin\omega}{\pi\omega} \end{aligned}$$

[3] フーリエ級数のときと同様、これは等式ではなく、変換を書いたものと捉えるべきである。厳密にはこの等式がいつも成立するわけではない。正式には定理 1 を参照。

$$
\begin{aligned}
B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sin\omega x\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

従って $f(x)$ のフーリエ積分は以下のようになる。

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

定理 1 により以下の等式を得る。

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 1/2 & x = -1, 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

上記積分は、以下の積分の極限（$a \to \infty$ のとき）である。

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos\omega x\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

この積分は $x = -1$, $x = 1$ の付近で振動する。この振動は a が大きくなっても消えない。これをフーリエ級数の場合と同様、ギブス現象（Gibbs phenomenon）と呼ぶ。

補足 $f(x)$ のフーリエ積分において $x = 0$ を代入すると

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega = 1$$

を得る。$\dfrac{\pi}{2}$ を両辺にかけると

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}$$

となる。これは Dirichlet integral と呼ばれる。これは、以下の関数の極限（$a \to \infty$ のとき）であり、sine integral と呼ばれる。

$$\mathrm{Si}(a) = \int_0^a \frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

$\mathrm{Si}(a)$ には振動があり、上記積分の振動はこの関数 $\mathrm{Si}(a)$ の振動からきている。

2　フーリエ変換 (Fourier transform)

前節で述べた通り、$f(x)$ のフーリエ積分は

$$f(x) = \int_0^\infty \{A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\}\,\mathrm{d}\omega$$

であり、A と B は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos\omega v\mathrm{d}v \\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin\omega v\mathrm{d}v \end{aligned}$$

これらを上記の等式に代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos\omega v\mathrm{d}v\cos\omega x + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin\omega v\mathrm{d}v\sin\omega x\right\}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos\omega v\mathrm{d}v\cos\omega x + \int_{-\infty}^\infty f(v)\sin\omega v\mathrm{d}v\sin\omega x\right\}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos\omega v\cos\omega x\mathrm{d}v + \int_{-\infty}^\infty f(v)\sin\omega v\sin\omega x\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\int_{-\infty}^\infty f(v)(\cos\omega v\cos\omega x + \sin\omega v\sin\omega x)\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(\omega x - \omega v)\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(\omega(x - v))\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left\{\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(\omega(x - v))\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

(括弧 { } の中は ω に関する偶関数なので)

得られた式の中の cos を sin に変えた式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left\{\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin(\omega(x - v))\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega$$

の値は、括弧 { } の中が ω に関する奇関数なので、0 である。

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

の x を $\omega(x - v)$ に置き換えると以下の等式が得られる。

$$e^{i\omega(x-v)} = \cos(\omega(x - v)) + i\sin(\omega(x - v))$$

この等式の両辺に $f(v)$ をかけると以下の等式を得る。

$$f(v)e^{i\omega(x-v)} = f(v)\cos(\omega(x-v)) + if(v)\sin(\omega(x-v))$$

両辺を v と ω に関して積分し、$\dfrac{1}{2\pi}$ をかけると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega(x-v)}\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(\omega(x-v)) + if(v)\sin(\omega(x-v))\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(\omega(x-v))\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\
&\quad +i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(\omega(x-v))\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(\omega(x-v))\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

よって以下の等式を得る。

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega(x-v)}\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega x-i\omega v}\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega x}e^{-i\omega v}\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-i\omega v}\mathrm{d}v\right\}e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

通常これを以下のように書く[4]。

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega \\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x$ を $f(x)$ のフーリエ変換、$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$ を $F(\omega)$ の逆フーリエ変換と呼ぶ。

注意 上記 2 つの式は変換の定義であり、等式ではない。$f(x)$ は $f(x)$ のフーリエ変換の逆フーリエ変換とは必ずしも等しくない（定理 1 参照）。

[4]定数（$\frac{1}{2\pi}$ と 1）は教科書により異なる。定数は例えば $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ と $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ でもよい

例題 以下の関数のフーリエ変換を計算せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

解答例

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x} \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{-i\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) \\
&= \frac{1}{-i\omega}(\cos\omega - i\sin\omega - (\cos\omega + i\sin\omega)) \\
&= \frac{1}{-i\omega}(-2i\sin\omega) \\
&= 2\frac{\sin\omega}{\omega}
\end{aligned}$$

参考文献

[1] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics.* John Wiley & Sons Ltd., tenth edition, 2011.