例題13

情報工学科　篠埜 功

例題　区間 $[-\pi, \pi]$ における $f(x) = x^2$ のフーリエ級数は

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx \tag{1}$$

である。これを複素指数関数 $\{e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}\}$ の線形結合の形に変換せよ。

解答例

　オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2}$$

より、以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= e^{i(-\theta)} \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned} \tag{3}$$

等式 (2) と (3) を加えると

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

が得られる。等式 (2) から (3) を引くと

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

が得られる。従って以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned} \tag{4}$$

等式 (4) において θ に kx を代入すると

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$$

が得られる。これを式 (1) に代入すると

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$$

が得られる。この式を以下のように書き換えて整理する。

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\\
&= \frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}(-1)^k(e^{ikx}+e^{-ikx})\\
&= \frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{k^2}(-1)^k e^{ikx}+\frac{2}{k^2}(-1)^k e^{-ikx}\right\}\\
&= \frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{k^2}(-1)^k e^{ikx}+\frac{2}{(-k)^2}(-1)^{(-k)} e^{i(-k)x}\right\}\\
&= \frac{\pi^2}{3}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{k^2}(-1)^k e^{ikx}+\frac{2}{(-k)^2}(-1)^{(-k)} e^{i(-k)x}\right\}\\
&= \frac{\pi^2}{3}+\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k^2}(-1)^k e^{ikx}\ +\sum_{k=-n}^{-1}\frac{2}{k^2}(-1)^k e^{ikx}\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}
\end{aligned}$$

ここで c_k は以下のように定義される。

$$c_k=\begin{cases}\dfrac{2}{k^2}(-1)^k & k>0\\ \dfrac{\pi^2}{3} & k=0\\ \dfrac{2}{k^2}(-1)^k & k<0\end{cases}$$

補足 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}a_k$ は通常 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k$ と書く。つまり上記の式 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}$ は、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}$$

と書いてもよい。