

例題 11

情報工学科 篠埜 功

例題 区間 $[-\pi, \pi]$ 上の $f(x) = x$ のフーリエ級数に対するパーセバルの等式を使って以下の級数の値を手順 (1)-(5) に従って求めよ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

- (1) 以下の直交関数系の線形結合のうち、関数 $f(x)$ に最も近いものを求めよ。近さの尺度としては、講義で説明した、 y 座標の差の 2 乗を区間 $[-\pi, \pi]$ において積分したもの (の半分) を用いよ。

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx \right\}$$

- (2) 関数 $f(x)$ の区間 $[-\pi, \pi]$ におけるフーリエ級数を示せ。(上記 (1) で求めた線形結合の n を大きくしたときの極限が関数 $f(x)$ の区間 $[-\pi, \pi]$ におけるフーリエ級数である。)
- (3) (2) で得られた級数を正規化せよ。
- (4) (3) で得られた級数に対するパーセバルの等式を書け。
- (5) 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ の値を求めよ。

補足 内積空間 \mathcal{L} および \mathcal{L} 内のベクトル \mathbf{u} について、 \mathcal{L} の正規直交基底 $\{\mathbf{e}_i | i \geq 1\}$ の線形結合

$$\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k$$

のうち、 \mathbf{u} との差のノルムの 2 乗 J が最も小さいベクトルが n が大きくなるに従って \mathbf{u} に収束するとき ($\lim_{n \rightarrow \infty} J = 0$ のとき) 以下の等式 (パーセバルの等式) が成り立つ。

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

解答例

(1) 仮に、以下の等式が成り立つと仮定する。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

(この等式を満たす $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ は存在しないが、仮にこの等式が成り立つ場合を考える。) 等式 (1) の両辺を区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 dx \\ &= a_0 \pi \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

等式 (1) の両辺に $\cos kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx \\ &= a_k \pi \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx \\ &= 0 \quad (x \cos kx \text{ は奇関数なので}) \end{aligned}$$

となる。

等式 (1) の両辺に $\sin kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx \\ &= b_k \pi \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx$ を別に計算すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx &= \left[x \frac{-\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos kx}{k} dx \\ &= -\frac{1}{k} [x \cos kx]_{-\pi}^{\pi} \quad \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos kx}{k} dx \text{ は } 0 \text{ なので} \right) \\ &= -\frac{1}{k} (\pi \cos \pi k - (-\pi) \cos(-\pi k)) \\ &= -\frac{1}{k} (\pi \cos \pi k + \pi \cos \pi k) \\ &= -\frac{2\pi}{k} \cos \pi k \\ &= -\frac{2\pi}{k} (-1)^k\end{aligned}$$

となる。よって、 b_k の計算の続きをすると、

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot -\frac{2\pi}{k} (-1)^k \\ &= -\frac{2}{k} (-1)^k\end{aligned}$$

となる。

以上をまとめると、 $f(x)$ に最も近い線形結合は

$$\sum_{k=1}^n -\frac{2}{k} (-1)^k \sin kx$$

である。

(2) $f(x) = x$ のフーリエ級数展開は、(1) で得られた線形結合の n を大きくしたときの極限であり、

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{k} (-1)^k \sin kx$$

である。

(3) $\sin kx$ のノルムを計算すると

$$\begin{aligned}\|\sin kx\| &= \sqrt{(\sin kx, \sin kx)} \\ &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx} \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

となり、(2) で求めた $f(x) = x$ のフーリエ級数は以下のように正規化される。

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{k}(-1)^k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{k}(-1)^k \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$$

(4) パーセバルの等式より、以下の等式を得る。

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{k}(-1)^k \sqrt{\pi} \right)^2 \quad (2)$$

等式 (2) の左辺を計算すると

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= (f, f) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \left(\frac{\pi^3}{3} - \left(-\frac{\pi^3}{3} \right) \right) \\ &= \frac{2}{3}\pi^3 \end{aligned}$$

となる。等式 (2) の右辺を計算すると

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{k}(-1)^k \sqrt{\pi} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2} ((-1)^k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2} (-1)^{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2} ((-1)^2)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2} 1^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2} \\ &= 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

となる。従って、 $f(x) = x$ のフーリエ級数に対するパーセバルの等式は以下のようになる。

$$\frac{2}{3}\pi^3 = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

(5) 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ の値は以下のように得られる。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{3}\pi^3 = \frac{1}{6}\pi^2$$

補足 得られた値 $\frac{1}{6}\pi^2$ はゼータ関数 $\zeta(n)$ の $n = 2$ の時の値である。ゼータ関数は以下の関数である。

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

つまり、 $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6}\pi^2$ である。