練習問題6の解答例

情報工学科　篠埜 功

練習問題　関数 $f(x) = x^2$ を区間 $[-\pi, \pi]$ においてフーリエ級数展開せよ。

解答例　教科書例 2.4 のやり方の解法を示す。仮に、

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

とおく。(1) の両辺を区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0 \mathrm{d}x \\ &= a_0\pi\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\pi^2\end{aligned}$$

となる。

(1) の両辺に $\cos kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x &= a_k\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\mathrm{d}x \\ &= a_k\pi\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\left[x^2\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\sin kx}{k}\mathrm{d}x\right\} \\ &= -\frac{2}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x \qquad \left(\left[x^2\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} \text{は 0 なので}\right)\end{aligned}$$

である。ここで、$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x$ を別に計算すると、

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x &= \left[x\frac{-\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos kx}{k}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{k}\left[x\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} \qquad (\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos kx}{k}\mathrm{d}x \text{ は } 0 \text{ なので}) \\
&= -\frac{1}{k}(\pi\cos\pi k - (-\pi)\cos(-\pi k)) \\
&= -\frac{1}{k}(\pi\cos\pi k + \pi\cos\pi k) \\
&= -\frac{2\pi}{k}\cos\pi k \\
&= -\frac{2\pi}{k}(-1)^k
\end{aligned}$$

である。よって、a_k の計算の続きをすると、

$$\begin{aligned}
a_k &= -\frac{2}{\pi k}(-\frac{2\pi}{k}(-1)^k) \\
&= \frac{4}{k^2}(-1)^k
\end{aligned}$$

となる。

(1) の両辺に $\sin kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x &= b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x \\
&= b_k\pi
\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin kx\mathrm{d}x \\
&= 0 \quad (x^2\sin kx \text{ は奇関数なので})
\end{aligned}$$

となる。

以上をまとめると、$f(x)$ に最も近い線形結合は

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx$$

である。

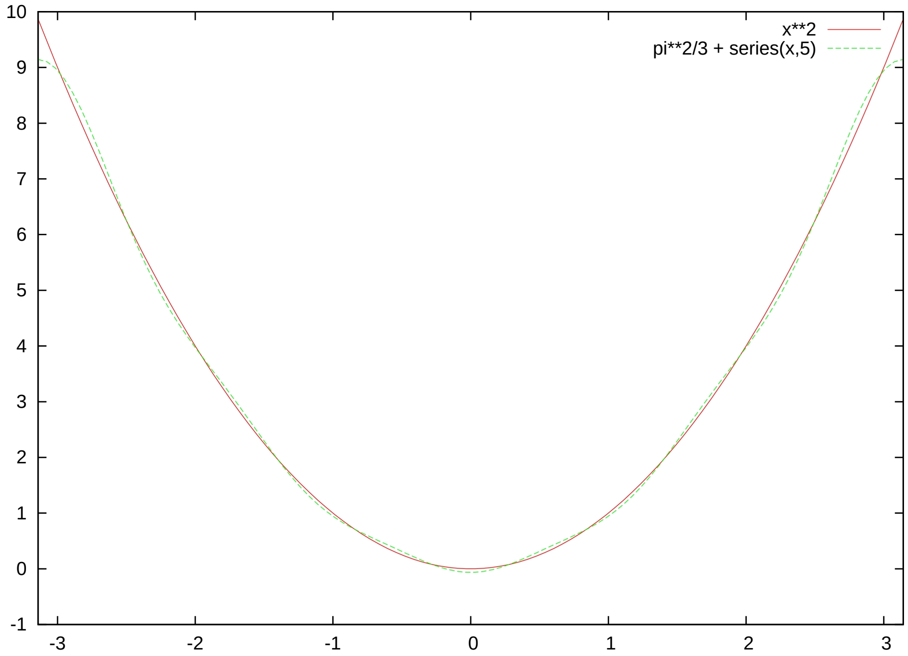

図 1: $f(x) = x^2$ とそのフーリエ級数の $\cos 5x$ の項までの部分和の比較

$f(x) = x^2$ のフーリエ級数展開は、上記で得られた線形結合の n を大きくしたときの極限であり、

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx$$

である。

補足　このフーリエ級数の $\cos 5x$ の項までの部分和

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{5} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{4}{25}\cos 5x$$

と $f(x) = x^2$ をグラフにすると図 1 のようになる。