応用数学 練習問題4 解答例

情報工学科 篠埜 功

問　列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ を列ベクトル $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の線形結合（$\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k = c_1 \boldsymbol{u}_1 + c_2 \boldsymbol{u}_2$ の形）で近似せよ。つまり、$c_1 \boldsymbol{u}_1 + c_2 \boldsymbol{u}_2$ が $\boldsymbol{a}$ に最も近くなるような c_1, c_2 を求めよ。近さの尺度は差のノルムの 2 乗の半分、つまり

$$J = \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{a} \right\|^2$$

とせよ。ノルムの定義は、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} x_k^2}$$

である。

解　教科書 1.3.1 節のようにベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を変数のままで連立一次方程式にしてから数値を入れて解く方法（解答例 1）と、最初に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を具体的なベクトルに置き換えてしまう方法（解答例 2）の 2 通りの解法を示す。解答例 1 の方が見通しがよい。

（解答例 1）　まず J を展開すると

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{a} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{a}, \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{a} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k, \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k \right) - 2 \left(\boldsymbol{a}, \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{u}_k \right) + \|\boldsymbol{a}\|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k,l=1}^{2} c_k c_l (\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l) - 2 \sum_{k=1}^{2} c_k (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_k) + \|\boldsymbol{a}\|^2 \right\}
\end{aligned}$$

となる。これを c_i（$i=1,2$）で偏微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c_i} &= \frac{\partial}{\partial c_i}\frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{2} c_k c_l(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_l) - 2\sum_{k=1}^{2} c_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_k) + \|\boldsymbol{a}\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{k,l=1}^{2} c_k c_l(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_l) - 2\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{k=1}^{2} c_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_k)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{2\sum_{k=1}^{2} c_k(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_i) - 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_i)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{2} c_k(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_i) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_i)
\end{aligned}
$$

となる。よって、$\dfrac{\partial J}{\partial c_1}=0$ と $\dfrac{\partial J}{\partial c_2}=0$ をまとめて行列表現で書くと

$$
\begin{pmatrix} (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_1) & (\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_1) \\ (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2) & (\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_1) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_2) \end{pmatrix}
$$

となる。これに問題の数値を代入すると、

$$
\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

となる。これを解くと、

$$
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

となる。以上より、$\boldsymbol{a}$ に最も近い $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ の線形結合は、

$$
4\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

である。

（解答例 2） $\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ に具体的な数値を代入して J を展開すると、

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\|c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{a}\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\|c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 3 \\ c_1 - 2 \\ c_1 - 6 \end{pmatrix}\right\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left\{c_1^2+c_2^2+9+2c_1c_2-6c_1-6c_2+c_1^2-4c_1+4+c_1^2-12c_1+36\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{3c_1^2+c_2^2+2c_1c_2-22c_1-6c_2+49\right\}
\end{aligned}
$$

となる。これを c_1, c_2 で偏微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c_1} &= \frac{1}{2}\{6c_1+2c_2-22\} = 3c_1+c_2-11 \\
\frac{\partial J}{\partial c_2} &= \frac{1}{2}\{2c_1+2c_2-6\} = c_1+c_2-3
\end{aligned}
$$

となる。これらを 0 とおくと以下の連立一次方程式が得られる。

$$
\begin{aligned}
3c_1+c_2 &= 11 \\
c_1+c_2 &= 3
\end{aligned}
$$

これを解くと、$c_1=4, c_2=-1$ となる。以上より、$\boldsymbol{a}$ に最も近い $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の線形結合は、

$$
4\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2 = 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}
$$

である。

（解答例 3） $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ の線形結合

$$
c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2
$$

を全部集めたものが、$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ が張る部分空間である。これは 3 次元空間内の 1 つの平面であり、ベクトル $\boldsymbol{a}$ からこの平面へ垂線を下ろして交わったところが最も近い。つまり、$\boldsymbol{a}$ に最も近くなるのは、$c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{u}_1$、$c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{u}_2$ がそれぞれ直交するときである。それぞれの内積を 0 と置くと

$$
\begin{aligned}
(c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1) = 0 \\
(c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_2) = 0
\end{aligned}
$$

が得られる。1 つ目の等式は、

$$
\begin{aligned}
(c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1) &= (c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) \\
&= (\begin{pmatrix}c_1+c_2-3\\c_1-2\\c_1-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) \\
&= c_1+c_2-3+c_1-2+c_1-6 \\
&= 3c_1+c_2-11 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり、2 つ目の等式は

$$
\begin{aligned}
(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_2) &= (c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) \\
&= (\begin{pmatrix}c_1+c_2-3\\c_1-2\\c_1-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) \\
&= c_1+c_2-3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。この連立方程式を解くと、$c_1 = 4, c_2 = -1$ となる。以上より、$\boldsymbol{a}$ に最も近い $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の線形結合は、

$$
4\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}
$$

である。