中間試験解答例

情報工学科　篠埜 功

2015年6月8日

問1（10点）　3点 $(0,0),(1,1),(3,4)$ に最も近い1次関数を求めよ。近さの尺度としては、y 座標の差の2乗の和の半分を用いよ。

解答例　求める関数を $f(x)=ax+b$、与えられた3点を $(x_1,y_1)=(0,0),(x_2,y_2)=(1,1),(x_3,y_3)=(3,4)$ とおく。関数 $f(x)$ と3点の y 座標の差の2乗和の半分

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(f(x_i)-y_i)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2$$

を最小にするような a,b を求めればよい。J を最小にするには、J の a,b での偏微分が0になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0,\frac{\partial J}{\partial b}=0$$

を解けばよい。まず、a での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial a}(ax_i+b-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}2(ax_i+b-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i^2+bx_i-x_iy_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{3}x_i^2+b\sum_{i=1}^{3}x_i-\sum_{i=1}^{3}x_iy_i
\end{aligned}$$

である。次に、b での偏微分は、

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(ax_i+b-y_i)^2\}$$

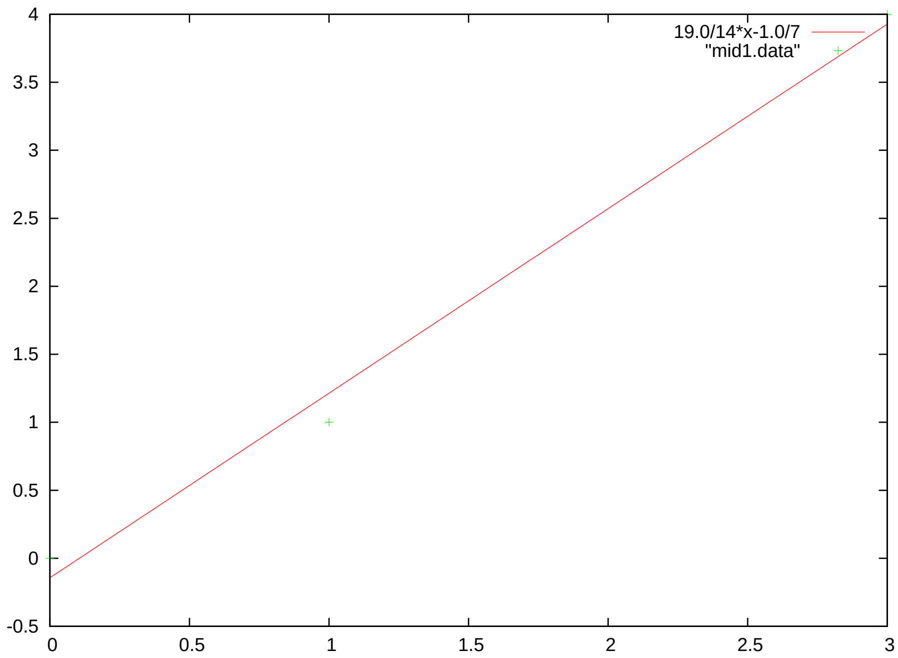

図 1: $f(x) = \dfrac{19}{14}x - \dfrac{1}{7}$ と与えられた 3 点の比較

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial b}(ax_i + b - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}2(ax_i + b - y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{3}x_i + b\sum_{i=1}^{3}1 - \sum_{i=1}^{3}y_i
\end{aligned}
$$

である。これらを 0 とおくと、

$$
\begin{aligned}
10a + 4b - 13 &= 0 \\
4a + 3b - 5 &= 0
\end{aligned}
$$

が得られ、これを解くと、$a = \dfrac{19}{14}, b = -\dfrac{1}{7}$ となる。よって求める関数は、

$$f(x) = \frac{19}{14}x - \frac{1}{7}$$

である。

補足　これを 3 点とともに図示すると図 1 のようになる。図 1 において、緑色の + 記号が与えられた点であり、赤色の直線が上記の 1 次関数 $f(x)$ である。

問 2（10 点）　4 点 $(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 1)$ に最も近い 2 次関数を求めよ。近さの尺度としては、y 座標の差の 2 乗の和の半分を用いよ。

解答例　求める関数を $f(x)=ax^2+bx+c$、与えられた4点を $(x_1,y_1)=(-1,0),(x_2,y_2)=(0,-1),(x_3,y_3)=(1,0),(x_4,y_4)=(2,1)$ とおく。関数 $f(x)$ と 4 点の y 座標の差の2乗和の半分

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(f(x_i)-y_i)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2$$

を最小にするような a,b,c を求めればよい。J を最小にするには、J の a,b,c での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial J}{\partial b}=0,\quad \frac{\partial J}{\partial c}=0$$

を解けばよい。まず、a での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial a}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)\frac{\partial}{\partial a}(ax_i^2+bx_i+c-y_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^4+bx_i^3+cx_i^2-x_i^2y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{4}x_i^4+b\sum_{i=1}^{4}x_i^3+c\sum_{i=1}^{4}x_i^2-\sum_{i=1}^{4}x_i^2y_i
\end{aligned}$$

である。次に、b での偏微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial b}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)\frac{\partial}{\partial b}(ax_i^2+bx_i+c-y_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^3+bx_i^2+cx_i-x_iy_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{4}x_i^3+b\sum_{i=1}^{4}x_i^2+c\sum_{i=1}^{4}x_i-\sum_{i=1}^{4}x_iy_i
\end{aligned}$$

である。次に、c での偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial c}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)\frac{\partial}{\partial c}(ax_i^2+bx_i+c-y_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)1 \\
&= \sum_{i=1}^{4}(ax_i^2+bx_i+c-y_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{4}x_i^2+b\sum_{i=1}^{4}x_i+c\sum_{i=1}^{4}1-\sum_{i=1}^{4}y_i
\end{aligned}
$$

である。これらを 0 とおくと、

$$
\begin{aligned}
18a+8b+6c-4 &= 0 \quad \cdots(1) \\
8a+6b+2c-2 &= 0 \quad \cdots(2) \\
6a+2b+4c &= 0 \quad \cdots(3)
\end{aligned}
$$

となる。これを解くと、

$$
a=\frac{1}{2}, \quad b=-\frac{1}{10}, \quad c=-\frac{7}{10}
$$

を得る。以上より、求める関数は

$$
f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{10}x-\frac{7}{10}
$$

である。

補足　これを 4 点とともに図示すると、図 2 のようになる。図 2 において、緑色の + 記号が与えられた点であり、赤色の曲線が上記の 2 次関数 $f(x)$ である。

問 3（10 点）　列ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ を列ベクトル $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ の線形結合（$\sum_{k=1}^{2}c_k\boldsymbol{u}_k=c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2$ の形）で近似せよ。つまり、$c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2$ が $\boldsymbol{a}$ に最も近くなるような c_1, c_2 を求めよ。近さの尺度は差のノルムの 2 乗の半分、つまり $J=\frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{2}c_k\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{a}\right\|^2$ とせよ。ノルムの定義は、$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ のとき、$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}=\sqrt{\sum_{k=1}^{3}x_k^2}$ である。

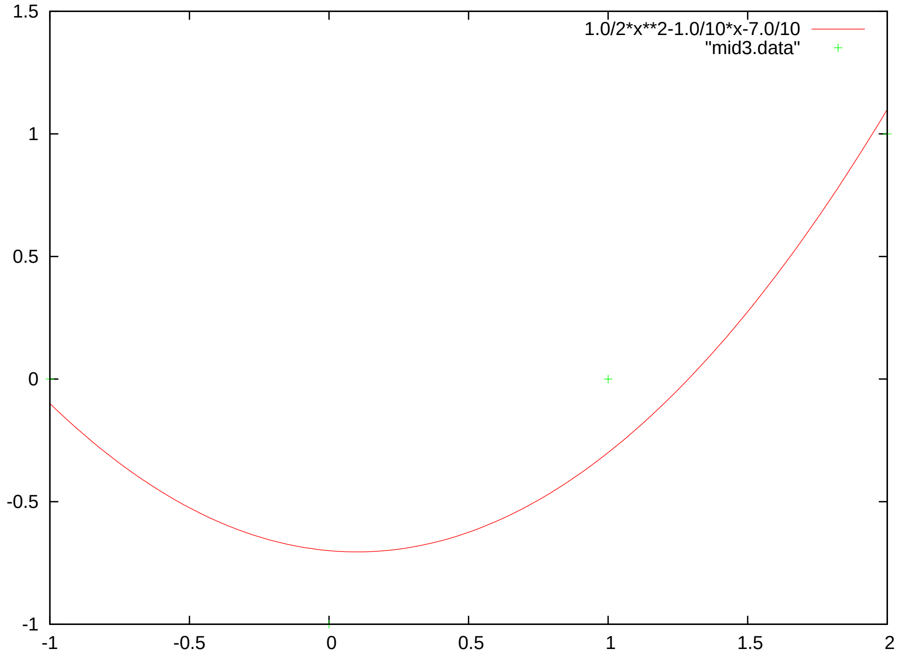

図 2: $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{10}x-\dfrac{7}{10}$ と与えられた 4 点の比較

教科書 1.3.1 節のようにベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ を変数のままで連立一次方程式にしてから数値を入れて解く方法（解答例 1）と、最初に $\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ を具体的なベクトルに置き換えてしまう方法（解答例 2）の 2 通りの解法を示す。解答例 1 の方が見通しがよい。

解答例 1　まず J を展開すると

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{2}c_k\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{a}\right\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2}c_k\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{a},\sum_{k=1}^{2}c_k\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{a}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{2}c_k\boldsymbol{u}_k,\sum_{k=1}^{2}c_k\boldsymbol{u}_k\right)-2\left(\boldsymbol{a},\sum_{k=1}^{2}c_k\boldsymbol{u}_k\right)+\|\boldsymbol{a}\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{2}c_kc_l(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_l)-2\sum_{k=1}^{2}c_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_k)+\|\boldsymbol{a}\|^2\right\}
\end{aligned}$$

となる。これを c_i（$i=1,2$）で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c_i} &= \frac{\partial}{\partial c_i}\frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{2}c_kc_l(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_l)-2\sum_{k=1}^{2}c_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_k)+\|\boldsymbol{a}\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{k,l=1}^{2}c_kc_l(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_l)-2\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{k=1}^{2}c_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_k)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{2\sum_{k=1}^{2}c_k(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_i)-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_i)\right\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{2} c_k(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_i) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i)$$

となる。よって、$\dfrac{\partial J}{\partial c_1} = 0$ と $\dfrac{\partial J}{\partial c_2} = 0$ をまとめて行列表現で書くと

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) & (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1) \\ (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) & (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_2) \end{pmatrix}$$

となる。これに問題の数値を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる。これを解くと、

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。以上より、$\boldsymbol{a}$ に最も近い $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の線形結合は、

$$4\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である。

解答例 2　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ に具体的な数値を代入して J を展開すると、

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\left\|c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{a}\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\| c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 3 \\ c_1 - 2 \\ c_1 - 6 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\{ c_1^2 + c_2^2 + 9 + 2c_1c_2 - 6c_1 - 6c_2 + c_1^2 - 4c_1 + 4 + c_1^2 - 12c_1 + 36 \right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{ 3c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 - 22c_1 - 6c_2 + 49 \right\} \end{aligned}$$

となる。これを c_1, c_2 で偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial c_1} &= \frac{1}{2}\{6c_1 + 2c_2 - 22\} = 3c_1 + c_2 - 11 \\ \frac{\partial J}{\partial c_2} &= \frac{1}{2}\{2c_1 + 2c_2 - 6\} = c_1 + c_2 - 3 \end{aligned}$$

となる。これらを 0 とおくと以下の連立一次方程式が得られる。

$$
\begin{aligned}
3c_1 + c_2 &= 11 \\
c_1 + c_2 &= 3
\end{aligned}
$$

これを解くと、$c_1 = 4, c_2 = -1$ となる。以上より、$\boldsymbol{a}$ に最も近い $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の線形結合は、

$$
4\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

である。

問 4（10 点）　関数 $f(x) = x^2$ を区間 $[-\pi, \pi]$ において、フーリエ級数展開することを考える。以下の問いに答えよ。

(1) 以下の直交関数系の線形結合のうち、関数 $f(x)$ に最も近いものを求めよ。近さの尺度としては、講義で説明した、y 座標の差の 2 乗を区間 $[-\pi, \pi]$ において積分したもの (の半分) を用いよ。

$$
\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}
$$

(2) 関数 $f(x)$ の区間 $[-\pi, \pi]$ におけるフーリエ級数を示せ。（上記 (1) で求めた線形結合の n を大きくしたときの極限が関数 $f(x)$ の区間 $[-\pi, \pi]$ におけるフーリエ級数である。）

解答例

(1) 教科書例 2.4 のやり方の解法を示す。仮に、

$$
f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}
$$

とおく。(1) の両辺を区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0 \mathrm{d}x \\
&= a_0\pi
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\pi^2
\end{aligned}
$$

となる。

(1) の両辺に $\cos kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x &= a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x \\ &= a_k\pi\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\left[x^2\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\sin kx}{k}\mathrm{d}x\right\} \\ &= -\frac{2}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x \qquad (\left[x^2\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} \text{は}\, 0\, \text{なので})\end{aligned}$$

である。ここで、$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x$ を別に計算すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x &= \left[x\frac{-\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos kx}{k}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{k}\left[x\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} \qquad (\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos kx}{k}\mathrm{d}x\, \text{は}\, 0\, \text{なので}) \\ &= -\frac{1}{k}(\pi\cos\pi k - (-\pi)\cos(-\pi k)) \\ &= -\frac{1}{k}(\pi\cos\pi k + \pi\cos\pi k) \\ &= -\frac{2\pi}{k}\cos\pi k \\ &= -\frac{2\pi}{k}(-1)^k\end{aligned}$$

である。よって、a_k の計算の続きをすると、

$$\begin{aligned}a_k &= -\frac{2}{\pi k}(-\frac{2\pi}{k}(-1)^k) \\ &= \frac{4}{k^2}(-1)^k\end{aligned}$$

となる。

(1) の両辺に $\sin kx$ をかけて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x &= b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x \\ &= b_k\pi\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin kx\mathrm{d}x \\ &= 0 \quad (x^2\sin kx\, \text{は奇関数なので})\end{aligned}$$

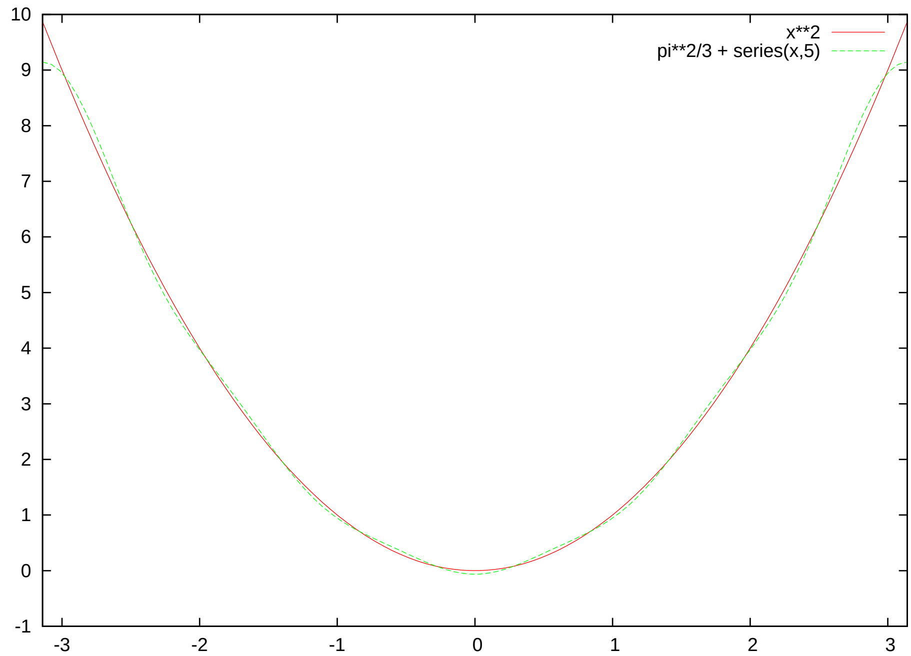

図 3: $f(x) = x^2$ とそのフーリエ級数の $\cos 5x$ の項までの部分和の比較

となる。

以上をまとめると、$f(x)$ に最も近い線形結合は

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx$$

である。

(2) $f(x) = x^2$ のフーリエ級数展開は、(1) で得られた線形結合の n を大きくしたときの極限であり、

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx$$

である。

補足　このフーリエ級数の $\cos 5x$ の項までの部分和

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{5} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{4}{25}\cos 5x$$

と $f(x) = x^2$ をグラフにすると図 3 のようになる。