第9回補足資料:
三角不等式の証明中の1ステップの内積の公理による証明

情報工学科　篠埜 功

2015年6月15日

この資料では教科書 p.53 の三角不等式の証明中の以下のステップを内積の公理を使って示す。

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

内積の公理は以下の3つである。内積空間を $\mathcal{L}$ とする。

1. 正値性 (Positive definiteness)
   $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{L}.\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0.$ ただし、等号 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$ は $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ の場合にのみ成立する。

2. 対象性 (Symmetry)
   $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{L}.\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}).$

3. 線形性 (Linearity)
   $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \wedge \forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \in \mathcal{L}.\ (c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = c_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + c_2(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}).$

上記の内積の公理を使って以下のように左辺から右辺へ変形できる。

$$
\begin{aligned}
& \underline{(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})} \\
= & \quad \{\ \text{線形性 (linearity)}\ \} \\
& \underline{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})} + \underline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})} \\
= & \quad \{\ \text{対称性 (symmetry)}\ \} \\
& (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \\
= & \quad \{\ \text{線形性 (linearity)}\ \} \\
& (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \underline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})} + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \\
= & \quad \{\ \text{対称性 (symmetry)}\ \} \\
& (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \underline{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})} + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \\
= & \quad \{\ \text{実数の計算}\ \} \\
& (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$