補足資料13: オイラーの公式

情報工学科　篠埜 功

2015年7月13日

複素関数 e^z はすべての $z \in \mathbb{C}$ について解析的（analytic）であり、$(e^z)' = e^z$ である。従って以下のマクローリン展開（Maclaurin series）を得る。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

この等式に $z = iy$ を代入すると以下の等式を得る。

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1}
\end{aligned}$$

得られた2つの級数は $\cos y$ と $\sin y$ のマクローリン展開である。

$$\begin{aligned}
\cos y &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} \\
\sin y &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1}
\end{aligned}$$

よって以下の等式が得られる。

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

これをオイラーの公式という。

補足　上記計算において以下の等式が成り立つことが使われている。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

一般に無限級数の値は足し算の順番が変わると変わる場合がある。しかし級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$$

は絶対収束し、その場合は級数の足し算の順番が変わっても級数の値は変わらない。従って上記のようにこの無限級数を 2 つの無限級数の和に分解してよい。