

Fourier 級数の gnuplot による表示について

情報工学科 篠埜 功

2015 年 5 月 25 日

先日紹介した gnuplot を用いて Fourier 級数の表示を行う方法を説明する。以下の関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

を区間 $[-\pi, \pi]$ 上でフーリエ級数展開すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x)$$

となる。この級数の n 項までの部分和を gnuplot でグラフで表示する場合は以下のようにすればよい。まず、第 k 項を変数 x, k の 2 変数関数として定義する。

$$t(x,k) = 4/(\pi*(2*k-1))*\sin((2*k-1)*x)$$

この関数を用いて、第 n 項までの部分和を再帰的に定義する。

$$\text{series}(x,n) = (n>0 ? t(x,n) + \text{series}(x,n-1) : 0)$$

関数 $f(x)$ は以下のように定義すればよい。

$$f(x) = (x>0 ? 1 : -1)$$

これらを使って、例えば第 5 項までの部分和と関数 $f(x)$ は以下のようにして表示すればよい。

```
set xrange [-pi:pi]
plot series(x,5), f(x)
```

上記のコマンドを kukei.txt というファイルに入れて講義用の page に置いてある。これを以下のようにして gnuplot に読み込ませればグラフが表示される。(つまり、コマンドラインで gnuplot を起動し、リダイレクトで kukei.txt を読み込ませる。)

```
$ gnuplot < kukei.txt
```

あるいは、gnuplot 起動後、kukei.txt の中身をコピーして貼り付けてもよい。グラフをファイルに入れたい場合は、kukei.txt のコメントアウトしてある先頭 2 行の # をとればよい(このファイルの先頭 2 行は eps ファイルの場合)。他の関数の Fourier 級数も上記の関数 t と series の $n=0$ の場合の記述を変更すれば表示できる。

注意 $f(x)$ と上記の級数は不連続点においては等しくならない。 $f(x)$ と $f(x)$ の Fourier 級数展開の結果の関係は正確には

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & x = -\pi, 0, \pi \\ f(x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

である。(これは講義の範囲外とする。)