応用数学 例題3

情報工学科　篠埜 功

2015 年 4 月 27 日

問　関数 $\sin x$ に区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で最も近い 1 次関数を求めよ。近さの尺度としては、y 座標の差の 2 乗の区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ における積分（の半分）を用いよ。
解答　求める 1 次関数を $f(x) = ax + b$ とおく。関数 $f(x)$ と $\sin x$ の y 座標の差の 2 乗の区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ における積分の半分

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x) - \sin x\}^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{ax + b - \sin x\}^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

を最小にするような a, b を求めればよい。J を最小にするには、J の a, b での偏微分が 0 になる点を求めればよい。つまり、

$$
\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0
$$

を解けばよい。まず、a での偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{ax + b - \sin x\}^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{ax + b - \sin x\}^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial a}\{ax + b - \sin x\}^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\{ax + b - \sin x\}x \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\{ax^2 + bx - x\sin x\} \mathrm{d}x \\
&= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \mathrm{d}x + b\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

である。ここでそれぞれの積分を計算すると、x^2 については、

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}
$$

であり、x については、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

である。$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \mathrm{d}x$ については、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \mathrm{d}x &= \left[x\frac{\cos x}{-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-1}\mathrm{d}x \\ &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

である。よって、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\pi^3}{24}a + \frac{\pi^2}{8}b - 1$$

となる。次に、b での偏微分は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ax + b - \sin x\}^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ax + b - \sin x\}^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial b}\{ax + b - \sin x\}^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\{ax + b - \sin x\} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ax + b - \sin x\} \mathrm{d}x \\ &= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x + b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{8}a + \frac{\pi}{2}b - 1\end{aligned}$$

である。これらを 0 とおくと、以下のような a, b に関する連立一次方程式が得られる。

$$\begin{gathered}\frac{\pi^3}{24}a + \frac{\pi^2}{8}b - 1 = 0 \\ \frac{\pi^2}{8}a + \frac{\pi}{2}b - 1 = 0\end{gathered}$$

となる。これを解くと、

$$a = \frac{96 - 24\pi}{\pi^3}, \quad b = \frac{8\pi - 24}{\pi^2}$$

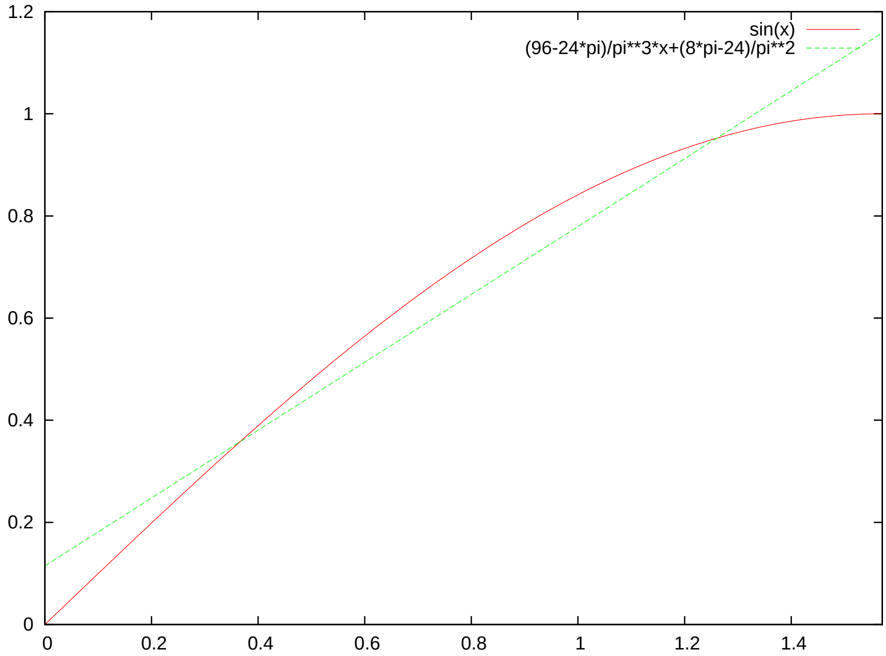

図 1: 区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で関数 $\sin x$ に最も近い 1 次関数

となる。以上より、求める 1 次関数は

$$f(x) = \frac{96 - 24\pi}{\pi^3}x + \frac{8\pi - 24}{\pi^2}$$

である。これを関数 $\sin x$ とともに区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ において図示すると、図 1 のようになる。図 1 において、緑色の直線が求めた 1 次関数であり、赤色の曲線が関数 $\sin x$ である。