例題14

情報工学科 篠埜 功

2015年7月20日

例題 以下のように定義される周期 $2L$（ただし $L > 1$）の矩形関数 $f_L(x)$ を考える。

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & -L < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < L \end{cases}$$

関数 $f_L(x)$ の区間 $[-L, L]$ における

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x\}$$

の形のフーリエ級数を求めよ。ここで ω_k は $\omega_k = \dfrac{k\pi}{L}$ と定義される。

解答例 仮に

$$f_L(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x\}$$

とおく。（この等式を満たす a_0, ..., a_n は存在しないが、仮にこの等式が成り立つとする。）

まず、両辺を区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f_L(x)\mathrm{d}x &= \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}a_0 \mathrm{d}x \\ &= La_0 \end{aligned}$$

従って a_0 は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L}\cdot 2 \\ &= \frac{2}{L} \end{aligned}$$

次に、両辺に $\cos\omega_k x$ をかけて区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f_L(x)\cos\omega_k x\mathrm{d}x &= \int_{-L}^{L} a_k\cos^2\omega_k x\mathrm{d}x \\ &= La_k\end{aligned}$$

従って a_k は以下のように得られる。

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\cos\omega_k x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L}\int_{-1}^{1}\cos\omega_k x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L}\left[\frac{\sin\omega_k x}{\omega_k}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{L}\cdot\frac{\sin\omega_k - \sin(-\omega_k)}{\omega_k} \\ &= \frac{1}{L}\cdot\frac{\sin\omega_k + \sin\omega_k}{\omega_k} \\ &= \frac{1}{L}\cdot\frac{2\sin\omega_k}{\omega_k} \\ &= \frac{2}{L}\cdot\frac{\sin\omega_k}{\omega_k}\end{aligned}$$

最後に、両辺に $\sin\omega_k x$ をかけて区間 $[-L, L]$ で積分する。

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f_L(x)\sin\omega_k x\mathrm{d}x &= \int_{-L}^{L} b_k\sin^2\omega_k x\mathrm{d}x \\ &= Lb_k\end{aligned}$$

従って b_k は以下のように得られる。

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\sin\omega_k x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L}\int_{-1}^{1}\sin\omega_k x\mathrm{d}x \\ &= 0\end{aligned}$$

以上より、関数 $f_L(x)$ に最も近い線形結合は

$$\frac{1}{L} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{L}\cdot\frac{\sin\omega_k}{\omega_k}\cos\omega_k x\right\}$$

である。関数 $f_L(x)$ のフーリエ級数は上記で得られた線形結合において n を大きくしたときの極限であり、

$$\frac{1}{L} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{L}\cdot\frac{\sin\omega_k}{\omega_k}\cos\omega_k x\right\}$$

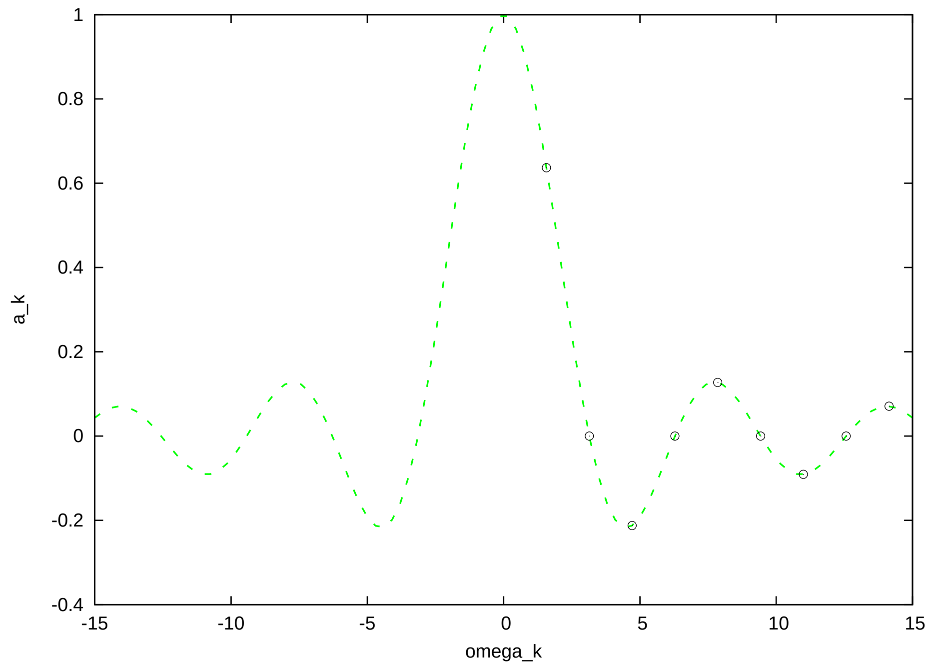

図 1: ω_k と a_k の関係（$L = 2$ の場合）

である。

ω_k と a_k の関係を $L = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ の場合についてそれぞれ図 1, 2, 3, 4, 5, 6 に示す。

補足　関数 $f_L(x)$ の L が大きくなったときの極限は以下の関数である。

$$\lim_{L\to\infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この関数は非周期関数である。以上により、周期関数だけでなく、非周期関数も展開（変換）できるのではないかと予想される。

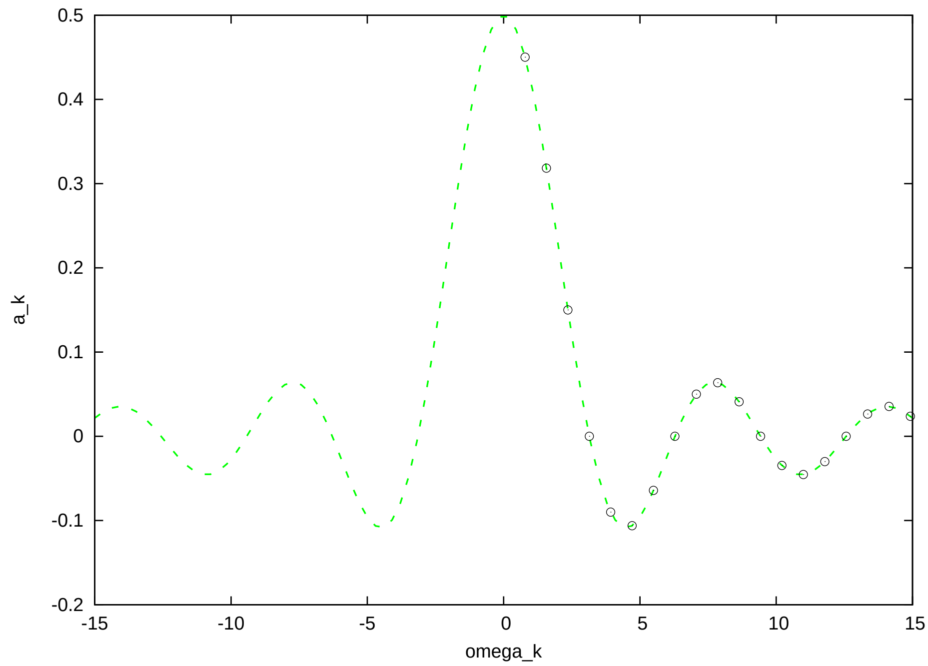

図 2: ω_k と a_k の関係（$L = 4$ の場合）

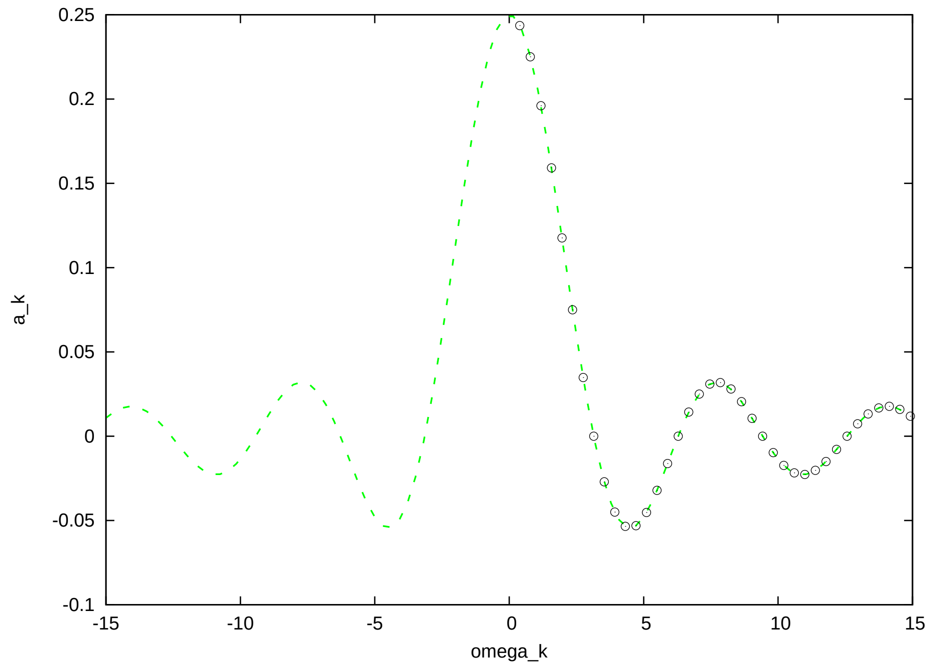

図 3: ω_k と a_k の関係（$L = 8$ の場合）

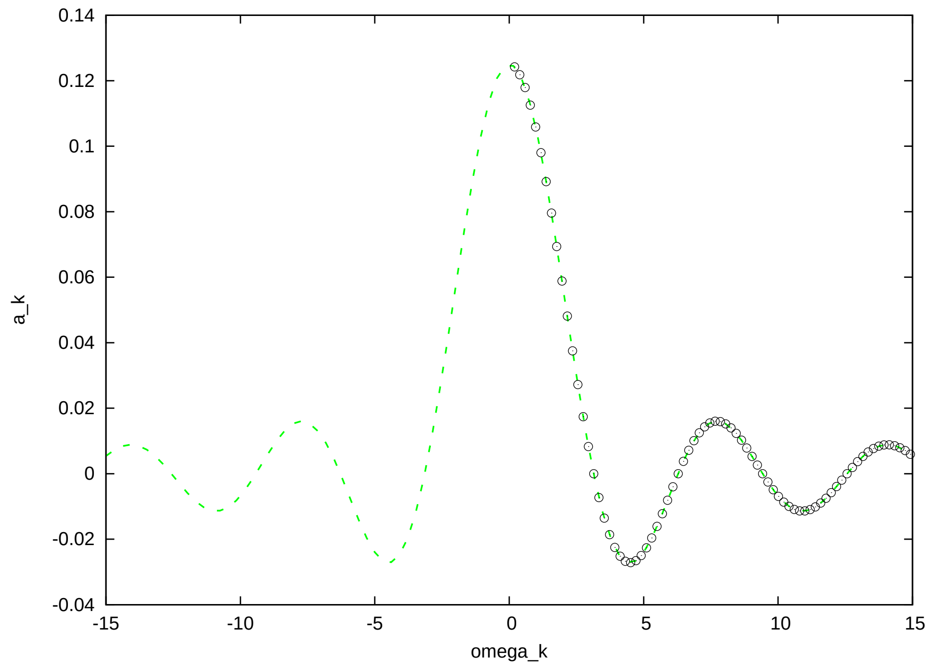

図 4: ω_k と a_k の関係（$L = 16$ の場合）

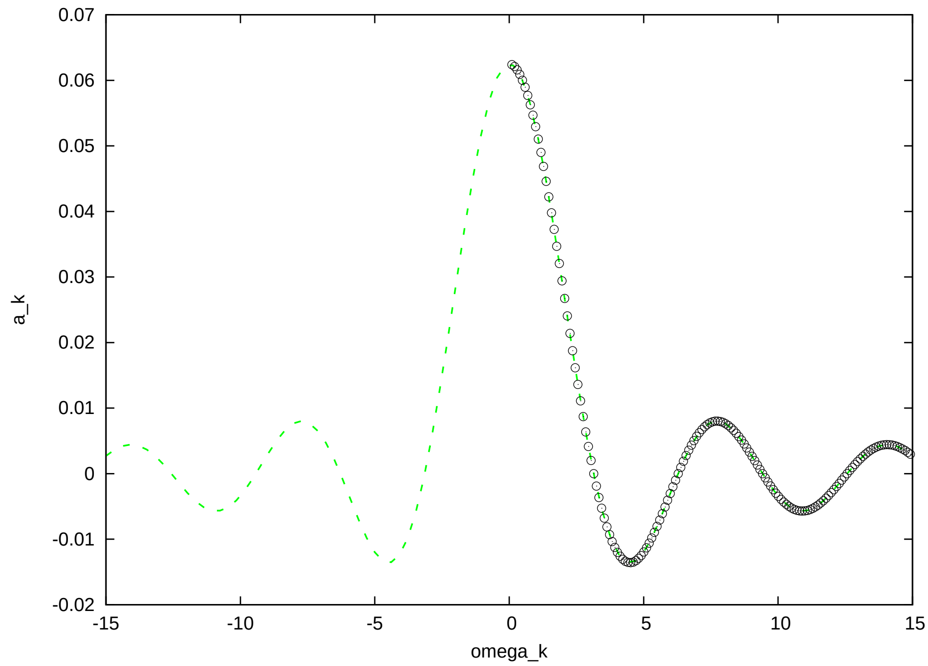

図 5: ω_k と a_k の関係（$L = 32$ の場合）

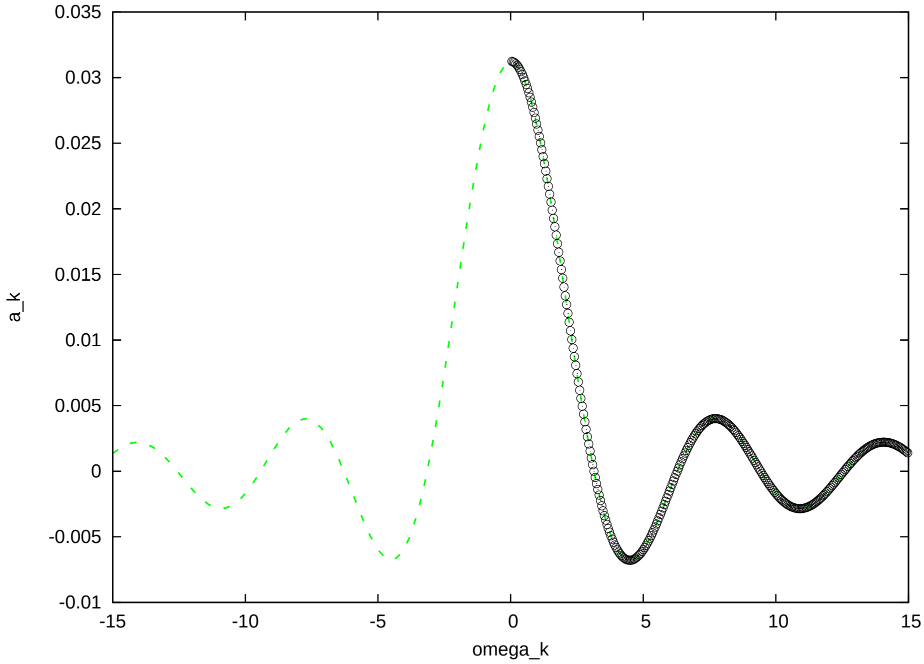

図 6: ω_k と a_k の関係（$L = 64$ の場合）