

# 練習問題 9-1

情報工学科 篠埜 功

2015年6月15日

練習問題 区間  $[0, 1]$  上のすべての実数値連続関数の集合を考える。以下の2つの演算（ベクトルの加算およびスカラー倍）は線形空間の公理を満たす。（ただし線形空間の公理については講義で説明しておらず講義の範囲外。）

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (cf)(x) &= c(f(x))\end{aligned}$$

この線形空間で次の演算を考える。

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

この線形空間内の関数を、任意の2つの関数の組み合わせについて上記の演算（積分）が値を持つものだけに制限する<sup>1</sup>。するとこの演算は内積の公理を満たす。この演算を上記線形空間に導入することにより、計量空間が得られる。

この計量空間において、関数  $f_1(x) = x$  と  $f_2(x) = x^2$  の内積およびそれらのノルムの積を計算し、比較せよ。

解答例

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) &= \int_0^1 f_1(x)f_2(x)dx \\ &= \int_0^1 x^3dx \\ &= \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \\ \|f_1\| &= \sqrt{(f_1, f_1)}\end{aligned}$$

<sup>1</sup>積分が値を持つかどうかは積分の定義にも依存する。解析の授業で習うリーマン積分や、数学科で習うようなルベグ積分など、さまざまな積分の定義がある。当然これらについても講義の範囲外とする。

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} \\
&= \sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}} \\
\|f_2\| &= \sqrt{(f_2, f_2)} \\
&= \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} \\
&= \sqrt{\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{5}}
\end{aligned}$$

内積  $(f_1, f_2)$  とノルムの積  $\|f_1\| \cdot \|f_2\|$  を比較すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\|f_1\| \cdot \|f_2\| &= \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{15}} \\
&\geq \sqrt{\frac{1}{16}} \\
&= \frac{1}{4} \\
&= (f_1, f_2)
\end{aligned}$$

以上により、上記の例においてコーシー・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz inequality) が成り立つことが確認された。