

応用数学 練習問題 4 解答例

情報工学科 篠埜 功

2014年5月11日

問 列ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ を列ベクトル $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の線形結合
($\sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2$ の形) で近似せよ。つまり、 $c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2$ が \mathbf{a} に最も近く
なるような c_1, c_2 を求めよ。近さの尺度は差のノルムの 2 乗の半分、つまり

$$J = \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k - \mathbf{a} \right\|^2$$

とせよ。ノルムの定義は、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^3 x_k^2}$$

である。

解 教科書 1.3.1 節のようにベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を変数のままで連立一次方程式に
してから数値を入れて解く方法 (解答例 1) と、最初に $\mathbf{a}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を具体的なベク
トルに置き換えてしまう方法 (解答例 2) の 2 通りの解法を示す。解答例 1 の方が
見通しがよい。

(解答例 1) まず J を展開すると

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k - \mathbf{a} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k - \mathbf{a}, \sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k - \mathbf{a} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k, \sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k \right) - 2 \left(\mathbf{a}, \sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{u}_k \right) + \|\mathbf{a}\|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k,l=1}^2 c_k c_l (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l) - 2 \sum_{k=1}^2 c_k (\mathbf{a}, \mathbf{u}_k) + \|\mathbf{a}\|^2 \right\}
\end{aligned}$$

となる。これを c_i ($i = 1, 2$) で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c_i} &= \frac{\partial}{\partial c_i} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k,l=1}^2 c_k c_l (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l) - 2 \sum_{k=1}^2 c_k (\mathbf{a}, \mathbf{u}_k) + \|\mathbf{a}\|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k,l=1}^2 c_k c_l (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l) - 2 \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k=1}^2 c_k (\mathbf{a}, \mathbf{u}_k) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 2 \sum_{k=1}^2 c_k (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i) - 2 (\mathbf{a}, \mathbf{u}_i) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^2 c_k (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i) - (\mathbf{a}, \mathbf{u}_i)
\end{aligned}$$

となる。よって、 $\frac{\partial J}{\partial c_1} = 0$ と $\frac{\partial J}{\partial c_2} = 0$ をまとめて行列表現で書くと

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) & (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) & (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{u}_1) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{u}_2) \end{pmatrix}$$

となる。これに問題の数値を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる。これを解くと、

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。以上より、 \mathbf{a} に最も近い $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の線形結合は、

$$4\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である。

(解答例 2) $\mathbf{a}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ に具体的な数値を代入して J を展開すると、

$$J = \frac{1}{2} \|c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 - \mathbf{a}\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\| c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 3 \\ c_1 - 2 \\ c_1 - 6 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \{c_1^2 + c_2^2 + 9 + 2c_1c_2 - 6c_1 - 6c_2 + c_1^2 - 4c_1 + 4 + c_1^2 - 12c_1 + 36\} \\
&= \frac{1}{2} \{3c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 - 22c_1 - 6c_2 + 49\}
\end{aligned}$$

となる。これを c_1, c_2 で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c_1} &= \frac{1}{2} \{6c_1 + 2c_2 - 22\} = 3c_1 + c_2 - 11 \\
\frac{\partial J}{\partial c_2} &= \frac{1}{2} \{2c_1 + 2c_2 - 6\} = c_1 + c_2 - 3
\end{aligned}$$

となる。これらを 0 とおくと以下の連立一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
3c_1 + c_2 &= 11 \\
c_1 + c_2 &= 3
\end{aligned}$$

これを解くと、 $c_1 = 4, c_2 = -1$ となる。以上より、 \mathbf{a} に最も近い $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の線形結合は、

$$4\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である。