練習問題14-1

情報工学科　篠埜 功

2015年7月20日

練習問題　以下の関数 $f(x)$ のフーリエ変換を計算せよ。

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここでは、フーリエ変換、フーリエ逆変換は以下の定義を用いる[1]。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

これらは変換の定義であり、等式ではない。$f(x)$ は $f(x)$ のフーリエ変換の逆フーリエ変換とは必ずしも等しくない。

[1]定義中の定数は教科書によって異なる。

解答例

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^L x e^{-i\omega x} \mathrm{d}x \\
&= \left[x \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_0^L - \int_0^L \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \mathrm{d}x \\
&= \frac{Le^{-i\omega L}}{-i\omega} - \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-\omega^2} \right]_0^L \\
&= \frac{Le^{-i\omega L}}{-i\omega} + \left[\frac{e^{-i\omega x}}{\omega^2} \right]_0^L \\
&= i\frac{Le^{-i\omega L}}{\omega} + \frac{e^{-i\omega L} - 1}{\omega^2} \\
&= i\frac{\omega Le^{-i\omega L}}{\omega^2} + \frac{e^{-i\omega L} - 1}{\omega^2} \\
&= \frac{i\omega Le^{-i\omega L} + e^{-i\omega L} - 1}{\omega^2} \\
&= \frac{e^{-i\omega L}(1 + i\omega L) - 1}{\omega^2} \\
&= \frac{e^{-iL\omega}(1 + iL\omega) - 1}{\omega^2}
\end{aligned}
$$

補足　関数 $F(w)$ のフーリエ逆変換は以下のように得られる。

$$
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iL\omega}(1 + iL\omega) - 1}{\omega^2} e^{i\omega x} \mathrm{d}\omega = \begin{cases} x & 0 < x < L \\ L/2 & x = L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

このフーリエ逆変換は上記の積分を計算して得たのではなく、$f(x)$ から得たものである。一般に、フーリエ級数と同様、以下の等式が成り立つ。

$$
\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}
$$