

今日の練習問題の解答例

情報工学科 篠埜 功

2015年7月6日

練習問題 区間 $[-1, 1]$ 上の実数値連続関数の集合を考える。練習問題 9-2 と同様に、和、スカラー倍、内積を以下のように導入し、計量空間を構築する。

$$\begin{aligned}(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) &= f(x) + g(x) \\(c\mathbf{f})(x) &= c(f(x)) \\(\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx\end{aligned}$$

この計量空間において、区間 $-1 \leq x \leq 1$ 上の4つの連続関数 $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$, $u_3(x) = x^2$, $u_4(x) = x^3$ にシュミットの直交化を施せ。

解答例 まず、 $e_1 = u_1$, つまり $e_1(x) = 1$ とする。

次に、 $e_2 = u_2 - c_1 e_1$ とおき、これが e_1 と直交するように c_1 を定める。 e_1 と e_2 の内積は

$$\begin{aligned}(e_1, e_2) &= (e_1, u_2 - c_1 e_1) \\ &= (e_1, u_2) - c_1 (e_1, e_1)\end{aligned}$$

であり、これを0とおくと、

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{(e_1, u_2)}{(e_1, e_1)} \\ &= \frac{(1, x)}{(1, 1)} \\ &= \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 1 dx} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって、

$$e_2(x) = x$$

である。

次に、 $e_3 = u_3 - (c_1e_1 + c_2e_2)$ とおき、これが e_1, e_2 と直交するように c_1, c_2 を定める。 e_1 と e_3 の内積は

$$\begin{aligned}(e_1, e_3) &= (e_1, u_3 - (c_1e_1 + c_2e_2)) \\ &= (e_1, u_3) - c_1(e_1, e_1)\end{aligned}$$

であり、これを 0 とおくと、

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{(e_1, u_3)}{(e_1, e_1)} \\ &= \frac{(1, x^2)}{(1, 1)} \\ &= \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} \\ &= \frac{2/3}{2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。 e_2 と e_3 の内積は

$$\begin{aligned}(e_2, e_3) &= (e_2, u_3 - (c_1e_1 + c_2e_2)) \\ &= (e_2, u_3) - c_2(e_2, e_2)\end{aligned}$$

であり、これを 0 とおくと、

$$\begin{aligned}c_2 &= \frac{(e_2, u_3)}{(e_2, e_2)} \\ &= \frac{(x, x^2)}{(x, x)} \\ &= \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって

$$e_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

である。

次に、 $e_4 = u_4 - (c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3)$ とおき、これが e_1, e_2, e_3 と直交するように c_1, c_2, c_3 を定める。 e_1 と e_4 の内積は

$$\begin{aligned}(e_1, e_4) &= (e_1, u_4 - (c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3)) \\ &= (e_1, u_4) - c_1(e_1, e_1)\end{aligned}$$

であり、これを0とおくと、

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{(e_1, u_4)}{(e_1, e_1)} \\ &= \frac{(1, x^3)}{(1, 1)} \\ &= \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。 e_2 と e_4 の内積は

$$\begin{aligned}(e_2, e_4) &= (e_2, u_4 - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)) \\ &= (e_2, u_4) - c_2 (e_2, e_2)\end{aligned}$$

であり、これを0とおくと、

$$\begin{aligned}c_2 &= \frac{(e_2, u_4)}{(e_2, e_2)} \\ &= \frac{(x, x^3)}{(x, x)} \\ &= \frac{\int_{-1}^1 x^4 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} \\ &= \frac{2/5}{2/3} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

となる。 e_3 と e_4 の内積は

$$\begin{aligned}(e_3, e_4) &= (e_3, u_4 - (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)) \\ &= (e_3, u_4) - c_3 (e_3, e_3)\end{aligned}$$

であり、これを0とおくと、

$$\begin{aligned}c_3 &= \frac{(e_3, u_4)}{(e_3, e_3)} \\ &= \frac{(x^2 - \frac{1}{3}, x^3)}{(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3})} \\ &= \frac{\int_{-1}^1 x^5 - \frac{1}{3}x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} dx} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって

$$e_4(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

以上より、 $1, x, x^2, x^3$ にシュミットの直交化を施して得られた直交系は

$$1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x$$

である。

補足1 この解答では正規化はしていないが、してもよい。

補足2 得られたベクトル(関数)はルジャンドル多項式 (Legendre polynomials)

と以下の関係がある。

$$P_i(x) = \frac{e_{i+1}(x)}{e_{i+1}(1)} \quad (i \geq 0)$$

$i = 0, 1, 2, 3$ の場合について以下で確認する。

$$\begin{aligned} \frac{e_1(x)}{e_1(1)} &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \\ &= P_0(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e_2(x)}{e_2(1)} &= \frac{x}{1} \\ &= x \\ &= P_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e_3(x)}{e_3(1)} &= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \\ &= \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ &= P_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e_4(x)}{e_4(1)} &= \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{1 - \frac{3}{5}} \\ &= \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\frac{2}{5}} \\ &= \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) \cdot \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ &= P_3(x) \end{aligned}$$