

# 応用数学 練習問題1 解答例

情報工学科 篠埜 功

2015年4月13日

問 以下の3点に最も近い直線を求め、3点とともに図示せよ。近さの尺度としては講義で説明した、 $y$ 座標の差の2乗の和(の半分)を用いよ。

$$(0, 1), (1, 0), (2, -2)$$

解答 求める関数を  $f(x) = ax + b$ 、与えられた3点を  $(x_1, y_1) = (0, 1)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 0)$ ,  $(x_3, y_3) = (2, -2)$  とおく。関数  $f(x)$  と3点の  $y$ 座標の差の2乗和の半分

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (f(x_i) - y_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)^2$$

を最小にするような  $a, b$  を求めればよい。 $J$  を最小にするには、 $J$  の  $a, b$  での偏微分が0になる点を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \frac{\partial J}{\partial b} = 0$$

を解けばよい。まず、 $a$  での偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial a} (ax_i + b - y_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 2(ax_i + b - y_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^3 (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) \\ &= a \sum_{i=1}^3 x_i^2 + b \sum_{i=1}^3 x_i - \sum_{i=1}^3 x_i y_i \end{aligned}$$

である。次に、 $b$  での偏微分は、

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)^2 \right\}$$

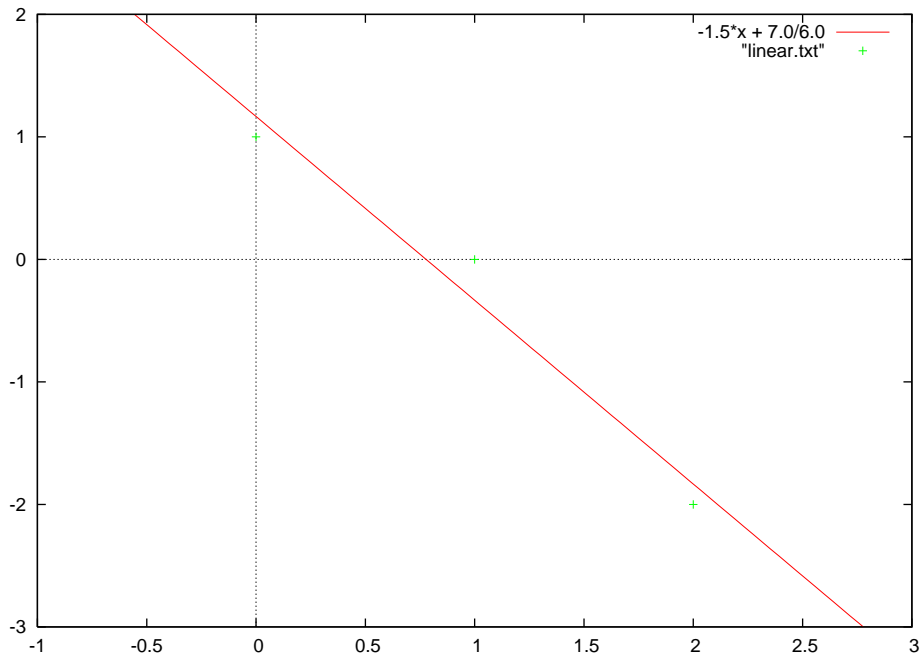


図 1:  $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{6}$  と与えられた 3 点の比較

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial b} (ax_i + b - y_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 2(ax_i + b - y_i) \\
 &= \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i) \\
 &= a \sum_{i=1}^3 x_i + b \sum_{i=1}^3 1 - \sum_{i=1}^3 y_i
 \end{aligned}$$

である。これらを 0 とおくと、

$$\begin{aligned}
 5a + 3b + 4 &= 0 \\
 3a + 3b + 1 &= 0
 \end{aligned}$$

が得られ、これを解くと、 $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{7}{6}$  となる。よって求める関数は、

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{6}$$

である。これを 3 点とともに図示すると図 1 のようになる。