確率論補助資料

担当：松田晴英

1　確率

1.1　試行と事象

サイコロを投げるときのように，同じ条件のもとで何回も繰り返すことができ，しかも，どの結果が起こるかが偶然に決まるようなを実験や観察を**試行** (trial) といいます。

また，試行の結果として起こることがらを**事象** (event) といい，A，B などの記号を用いて表します。

一般に，事象のうちで分割不可能な事象を**根元事象** (elementary event) といい，根元事象全体の集合，すなわち，必ず起こるという事象を**全事象** (sure event) または**標本空間** (sample space) といい，Ω で表します。また，全く起こりえない事象，すなわち，根元事象を全く含まないものも事象とみなし，これを**空事象** (impossible event) といい，$\emptyset$ で表します。

1.2　事象の演算

ここで，事象に関する基本的な演算を導入します。

和事象 2 つの事象 A，B の少なくとも一方が起こるという事象を A と B の和事象 (union of events A and B) といい，$A \cup B$ で表します。また，事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ の和事象を次の式で表します。

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

積事象 2 つの事象 A，B が同時に起こるという事象を A と B の積事象 (intersection of events A and B) といい，$A \cap B$ で表します。また，事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ の積事象を次の式で表します。

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

余事象 事象 A に対して，A が起こらない事象を A の**余事象** (complement) といい，$\overline{A}$ または A^c で表します。

2 つの事象 A，B が同時に起こらない，すなわち，$A \cap B = \emptyset$ のとき，A と B は**互いに排反する** (mutually exclusIve or disjoint) といいます。

1.3　確率の定義

『確率』を定義するにはいくつかの方法があります。

数学的確率　一般に，ある試行において，起こり得るすべての結果がどれも同じ程度に起こると期待できるとき，その試行の 1 つの結果からなる根元事象は**同様に確からしい**といいます。
ある試行において，起こり得るすべての結果が N 個あり，各結果からなる根元事象は同様に確からしい，すなわち，等可能性の前提が仮定されているとします。ここで，事象 A の根元事象の個数を $n(A)$ とするとき，事象 A の起こる確率 $P(A)$ を次のように定義します。

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$

この確率を**数学的確率** (mathematical probability) といいます。

初等中等教育における確率は，この数学的確率によって定義されています。しかし，この定義では，確率を定義するのに『根源事象の起こる確率が等しいことが前提』となっています。これに違和感がないでしょうか。

統計的確率　ある試行を同じ条件のもとで N 回繰り返したとき，事象 A が $n(A)$ 回起こったとします。このとき，$\dfrac{n(A)}{N}$ をこの N 回の試行に対する事象 A の起こる相対頻度といいます。例えば，硬貨を 10 回投げたときに表が 6 回出たとすると，表の出る相対頻度は $\frac{3}{5}$ です。一般に，試行回数が増加するにつれて相対頻度がある定数 p に収束すると見なせるとき，この値 p をこの試行のもとで事象 A が起こる**統計的確率** (statistical probability) といいます。

例えば，サイコロを 1 回投げたとき，1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ と認識します。これは数学的確率の定義により,「1 のが出る」事象から「6 の目が出る」事象までのすべてが同様に確からしいので，$\frac{1}{6}$ と考えるのです。一方，統計的確率は多数回の実験によって，定義されています。経験的にもわかるように，実験には誤差がつきものです。実際，多数回の実験をしてみると，サイコロがゆがんでいたりして,「1 の目が出る」統計的確率が $\frac{1}{6}$ になるとは限りません。また，統計的確率によって確率を求めるには多数回の実験が必要です。つまり，統計的確率は実際には経験できない状況に基づいて定義されています。これを数学的に扱うには疑問が残ります。

また，上記 2 つの定義では，根源事象が無限個の場合に確率を求めることができません。そこで，次の方法が取られました。

公理論的確率　標本空間 Ω の事象 A に次の**確率公理** (probability axioms) をみたすように実数を対応させる関数 P を**公理論的確率**といいます。

(i) $P(A) \geq 0$,

(ii) $P(\Omega) = 1$,

(iii) $A_1,\ A_2, \ldots, A_n, \ldots$ が互いに排反する事象（$A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$) のとき,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

数学的確率のイメージで上の定義を眺めてしまうと，これって確率がみたす性質じゃないのと思ってしまうかも知れません。公理論的確率では定義を「確率とは $\cdots$ である」というように陽的 (explicit) に与えるのでなく，公理として挙げられた 3 つの条件すべてをみたす実数を事象 A に対応させる関数として確率を定義したのです。
このように，陰的 (implicit) な概念規定から出発する方法を公理論的方法といいます。

1.4　確率の基本性質

以下の性質はどれも確率の定義から導くことができます。

任意の事象 A に対して，次が成り立つ。

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

公理論的確率による証明

1. 余事象の定義より，任意の事象 A は $A \cup \overline{A} = \Omega$ をみたすので，$P(\Omega) = P(A \cup \overline{A})$ である。一方，公理論的確率の定義 (ii) より，$P(\Omega) = 1$ である。また，A と $\overline{A}$ は互いに排反であるから，公理論的確率の定義 (iii) より，$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ である。よって，$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ が成り立つ。

2. 公理論的確率の定義 (i) より，$P(\overline{A}) \geq 0$ であるから，上で得られた $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ によって，$P(A) \leq 1$ が成り立つ。

3. 3 つの事象 $A \cap \overline{B}$，$A \cap B$，$\overline{A} \cap B$ は互いに排反だから，公理論的確率の定義 (iii) より，次が成り立つ。
   $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$，$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$，
   $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$
   これら 3 式によって，容易に求められる。